Письма в ЖЭТФ, том 71, вып.6, стр.391 - 393 © 2000г. 25 марта

О ПРОВОДИМОСТИ "РАСКРАШЕННОЙ" ПЛОСКОСТИ

В.Г.Марихин[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 24 февраля 2000 г.

Рассматривается задача о вычислении проводимости "раскрашенной" плоскости, то есть плоскости, разбитой на участки с разными проводимостями. Выведено точное соотношение между полной проводимостью такой системы и дуальной к ней (с обратными проводимостями) в случае, когда система эффективно изотропна (то есть тензор проводимости пропорционален единичной матрице). Проводимость двухцветных систем, таких, как "шахматная доска" или треугольная решетка, вычисляется точно и оказывается равной $\sigma = (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$. Обсуждается частный случай модели "гексагона", а также соотношение дуальности для анизотропных систем и системы с магнитным полем.

PACS: 73.61.-r, 75.70.Ak

В 1970 г. в работе Дыхне [1] с помощью соотношений дуальности была найдена проводимость двухфазной тонкой пленки при равных концентрациях фаз и случайном их расположении. В той же работе делается утверждение о том, что проводимость "шахматной доски" может быть вычислена таким же способом, причем проводимость равна $\sigma = (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$, где σ_1 и σ_2– проводимости "черных" и "белых" клеток доски, соответственно. Данное утверждение не было доказано, поскольку помимо дуального преобразования уравнений, надо проследить за преобразованием граничных условий.

Целью данной работы является вывод точных соотношений дуальности в многофазном случае с учетом граничных условий.

Итак, рассмотрим некоторое периодическое разбиение плоскости на области (плакеты), причем элементарная ячейка такой структуры содержит N различных плакетов с проводимостями σ_i, $i = 1, 2 \dots N$. Необходимо вычислить проводимость такой системы. Наиболее простой ответ получается, когда тензор проводимости системы пропорционален единичной матрице: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\,\delta_{\alpha\beta}$, то есть система эффективно изотропна.

Уравнение на плакете и граничные условия удобно сформулировать для напряженности поля (которая будучи физически наблюдаемой является периодической функцией на решетке, в отличие от потенциалов, которые являются квазипериодическими функциями), а именно, уравнения на всей плоскости имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

а на каждом из плакетов имеют место уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{E}^i = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{j}^i = 0, \quad \mathbf{j}^i = \sigma_i\mathbf{E}^i, \tag{2}$$

условия на границах плакетов имеют вид

$$E^i_{\mathbf{t}} = E^j_{\mathbf{t}}, \quad \sigma_i E^i_{\mathbf{n}} = \sigma_j E^j_{\mathbf{n}}, \tag{3}$$

1) e-mail: mvg@itp.ac.ru

тогда, применяя преобразование дуальности

$$E'^i_\alpha = \sigma_i e_{\alpha\beta} E^i_\beta, \quad \sigma'_i = 1/\sigma_i, \quad e_{11} = e_{22} = 0,\ e_{12} = -e_{21} = 1, \tag{4}$$

получим новую систему, удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и граничным условиям (3) для $\mathbf{E}'^i$ и σ'_i.

Отметим, что потенциал как первоначальной, так и преобразованной системы вычисляется по формуле

$$\phi = \phi_0 + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} (\mathbf{E} d\mathbf{s}), \tag{5}$$

причем в силу уравнений (1) и граничных условий (3) интеграл в (5) не зависит от контура интегрирования, а потенциал является однозначной и непрерывной функцией координат (как первоначальной, так и преобразованной системы).

Перейдем теперь к вычислению проводимостей. Вычислим интегральную напряженность поля на i-м плакете:

$$\mathbf{e}^i = \int_{'i'square} dx\, dy\, \mathbf{E}^i. \tag{6}$$

В изотропном случае эффективная проводимость является скаляром и имеет вид

$$\sigma_{eff} = \sum \sigma_i e^i_x / \sum e^i_x = \sum \sigma_i e^i_y / \sum e^i_y. \tag{7}$$

Из формулы (4) следует, что

$$e'^i_x = \sigma_i e^i_y, \quad e'^i_y = -\sigma_i e^i_x. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\sigma'_{eff} = 1/\sigma_{eff}, \quad \sigma'_i = 1/\sigma_i. \tag{9}$$

Окончательно, соотношение дуальности для проводимостей

$$\sigma_{eff}(\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_N)\sigma_{eff}(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1}, \ldots, \frac{\sigma_0^2}{\sigma_N}) = \sigma_0^2, \tag{10}$$

причем размерный параметр σ_0– любой.

В случае шахматной доски (либо в случае двухцветного треугольного покрытия) подставим $\sigma_0^2 = \sigma_1\sigma_2$ в (10) и получим

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}. \tag{11}$$

Формула (11) для шахматной доски получена в работе [2] с помощью точного решения уравнений (5) через эллиптические функции, а также в [3] по теории возмущения в достаточно высоком порядке. В работе [4] формула (11) для треугольной решетки не выполняется.

Отметим, что мы пользовались условием периодичности только для того, чтобы суммирование в числителе и знаменателе в (7) было бы конечным. Обобщая (7) на бесконечный случай, можно воспроизвести и все результаты для смесей.

Конечно, для того, чтобы получить формулу для проводимости в случае, когда $N > 2$, не достаточно использовать только соотношение дуальности (10), однако в некоторых частных случаях это можно сделать. Например, рассмотрим случай "гексагона", то есть гексагональное покрытие с $N = 3$. Тогда, если $\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$, то и $\sigma_{eff} = (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$.

Рассмотрим систему, помещенную в постоянное магнитное поле. Будем считать, что тензор проводимости каждого из плакетов имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta} + \sigma^H e_{\alpha\beta}, \quad \sigma^H \sim H. \tag{12}$$

Соотношение дуальности (10) можно обобщить на случай с магнитным полем, потому что тензор проводимости (12) коммутирует с тензором преобразования дуальности $e_{\alpha\beta}$. Преобразование дуальности выглядит в этом случае следующим образом:

$$E'^i_\alpha = \sigma_{\alpha\beta,i} e_{\beta\gamma} E^i_\gamma, \quad \sigma'^i_{\alpha\beta} = (\sigma^i_{\alpha\beta})^{-1}. \tag{13}$$

Так как $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, то и для преобразованной системы эти соотношения, а также граничные условия выполняются. Имеем

$$(E^i_\alpha - E^j_\alpha, e_{\alpha\beta}n_\beta) = 0, \quad (n_\alpha, \sigma^i_{\alpha\beta}E^i_\beta - \sigma^j_{\alpha\beta}E^j_\beta) = 0, \tag{14}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к границе раздела между плакетами i и j. Тогда легко видеть, что граничные условия для системы, полученной с помощью преобразований дуальности (13), имеют вид (14).

Удобно обозначить

$$\Sigma = \sigma + i\sigma^H, \quad \sigma^a_{\alpha\beta}\sigma^b_{\beta\gamma} = \sigma^c_{\beta\gamma} \iff \Sigma^a\Sigma^b = \Sigma^c. \tag{15}$$

Тогда формула дуальности для проводимостей имеет вид

$$\Sigma_{eff}(\Sigma^1\Sigma^2...\Sigma^N)\,\Sigma_{eff}(\frac{\sigma_0^2}{\Sigma^1}\frac{\sigma_0^2}{\Sigma^2}...\frac{\sigma_0^2}{\Sigma^N}) = \sigma_0^2, \quad \sigma_0 \in \Re \tag{16}$$

В случае двухкомпонентных систем, если $\Sigma^1\Sigma^2 \in \Re$, то $\Sigma_{eff} = (\Sigma^1\Sigma^2)^{\frac{1}{2}}$.

Оказывается, что применяя формулы (7) в векторном виде, можно получить ответ и для анизотропного случая. Пусть $\hat\sigma = \operatorname{diag}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$, тогда, опуская масштабный множитель σ_0, получим, что преобразование дуальности

$$E'^i_\alpha = e_{\alpha\beta}\sigma_{i,\beta\beta}E^i_\beta, \quad \sigma'_{i,xx} = \frac{1}{\sigma_{i,yy}}, \quad \sigma'_{i,yy} = \frac{1}{\sigma_{i,xx}} \tag{17}$$

приводит к соотношению дуальности

$$\sigma_{xx}\sigma'_{yy} = \sigma'_{xx}\sigma_{yy} = 1. \tag{18}$$

Автор благодарит А.М.Дюгаева и Ю.Н.Овчинникова за сообщение о результатах работы до ее опубликования, а также А.Ю.Каменщика за полезные обсуждения.

---

1. А.М.Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. А.М.Дюгаев, Ю.Н.Овчинников, принята к печати в ЖЭТФ **117** (2000).
3. А.Ю.Каменщик, И.М.Халатников, частное сообщение.
4. Ю.Н.Овчинников, направлена в ЖЭТФ.