

ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ ПРИ ЕЕ САМОФОКУСИРОВКЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

С.А.Изьюров¹⁾, С.А.Козлов¹⁾

*Институт точной механики и оптики (Технический университет)
197101 Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 28 апреля 2000 г.

Получено новое нелинейное уравнение, описывающее динамику пространственного спектра монохроматической волны при ее непараксиальной самофокусировке в среде с кубичной нелинейностью. Рассмотрены особенности формирования световых нитей с поперечными размерами порядка длины волны. Показано, что фундаментальной причиной ограничения самофокусировки является самоотражение излучения назад.

PACS: 42.65.Jx

Самофокусировка света в средах с положительной нелинейностью показателя преломления – классическое явление нелинейной оптики. Изучению особенностей самофокусировки с начала 60-х годов посвящены сотни работ, прекрасный и подробный обзор которых приведен, например, в монографии [1]. Теория этого явления для монохроматического излучения в изотропных средах в большинстве статей строится на основе анализа решений кубического уравнения Шредингера, к которому сводятся уравнения Максвелла в приближении параксиальных световых пучков. Однако при теоретическом описании в этом приближении самофокусировка носит катастрофический характер со схлопыванием поля излучения в точку. Анализ поведения светового поля в окрестности особенности, где параксиальное приближение неприменимо, посвящено также немало работ, их обзор можно найти в [1]. Строгие решения уравнений Максвелла для изотропных сред с кубическими нелинейностями получены только для стационарных (то есть, по терминологии [1], не зависящих от координаты оси, вдоль которой распространяется излучение) непараксиальных световых пучков (см. также работу [2] и обзор в ней). Нестационарная (в выше приведенном смысле) динамика поля в процессе глубокой самофокусировки изучалась на основе различных модификаций уравнений Шредингера. Критический обзор используемых при этом приближений дан, например, в [3]. Со своей стороны отметим, что в большинстве этих работ даже линейная дифракция узких световых пучков не описывалась строго. Линейная непараксиальная дифракция учитывалась корректно в [4] (это, по-видимому, наиболее цитируемая работа по непараксиальной самофокусировке), однако при описании в [4] трехмерной нелинейной эволюции поля не учитывался его векторный характер, что для рассмотренного в этой работе случая было ошибочно [1, 2].

В настоящей работе для описания непараксиальной самофокусировки монохроматического излучения в изотропной среде с кубичной нелинейностью нами получено новое нелинейное уравнение, описывающее динамику не поля светового пучка, а его пространственного спектра. Будучи линеаризованным, это уравнение точно

¹⁾ e-mail: izyurov@infopro.spb.su, kozlov@phd.ifmo.ru

описывает дифракцию однонаправленной волны, включая ситуацию, когда в ее пространственном спектре появляются компоненты больше волнового числа, которым соответствуют уже не бегущие, а эванесцентные волны. В основе метода построения спектрального уравнения заложено требование, чтобы его решения вида однонаправленной волны являлись и частными решениями полного нелинейного волнового уравнения. Укороченное полевое уравнение – аналог выведенного спектрального уравнения – нетривиально, что, по-видимому, и объясняет продолжительность его поиска. На основе численного анализа решений нового уравнения обсуждены особенности сверхфокусирования пространственного спектра излучения и формирования нити самофокусировки с поперечными размерами порядка длины волны. Показано, что естественной причиной ограничения самофокусировочного коллапса может быть явление самоотражения излучения назад.

При описании распространения монохроматического излучения в изотропной диэлектрической среде с кубической нелинейностью уравнения Максвелла могут быть редуцированы к виду [1]

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{E} – комплексная амплитуда полного электрического поля световой волны $\mathbf{E}' = \frac{1}{2} \mathbf{E} \exp(-i\omega t) + \text{к.с.}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + 12\pi \chi^{1111} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) \mathbf{E} + 12\pi \chi^{1221} \mathbf{E} \times (\mathbf{E}^* \times \mathbf{E})$ – комплексная амплитуда электрической индукции $\mathbf{D}' = \frac{1}{2} \mathbf{D} e^{-i\omega t} + \text{к.с.}$, ω – частота света, $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, χ^{1111} , χ^{1221} – компоненты ее тензора нелинейной восприимчивости, c – скорость света в вакууме. При выводе уравнения (1) не учитывалась генерация в нелинейной среде новых оптических гармоник.

В настоящей статье для демонстрации спектрального метода анализа самофокусировки мы ограничимся ее рассмотрением для двумерных линейно поляризованных ТЕ-пучков. Уравнение (1) в этом случае примет вид [1]

$$\Delta E + k^2 + \chi |E|^2 E = 0, \quad (2)$$

где E – комплексная амплитуда поля, поляризованного вдоль оси y , $\Delta = \partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial x^2$ – двумерный лапласиан, $k = \sqrt{\epsilon k_0}$, $\chi = 12\pi(\omega^2/c^2)\chi^{1111}$.

Полагая ось z выделенным направлением (в численных расчетах двумерное поле $E(x, z)$ будем считать симметричным относительно этой оси), перепишем уравнение (2) для пространственного спектра $G(k_x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, z) \exp(-ik_x x) dx$ в виде

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)G + \frac{\chi}{4\pi^2} \int \int G^*(\alpha - k_x) G(\alpha - \beta) G(\beta) d\alpha d\beta = 0. \quad (3)$$

Линеаризованное уравнение (3) имеет решение

$$G = C_1(k_x) e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2} z} + C_2(k_x) e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2} z}, \quad (4)$$

в котором первое слагаемое описывает распространение излучения в положительном направлении оси z , второе – в обратном направлении. Линейная дифракция однонаправленной волны (то есть при $C_2 = 0$) описывается уравнением

$$\partial G/\partial z - i\sqrt{k^2 - k_x^2} G = 0. \quad (5)$$

Очевидно, что решение укороченного уравнения (5) является одновременно и частным решением линеаризованного уравнения (3). Причем физическая природа укорочения линеаризованного уравнения (3), то есть перехода к уравнению (5) с производной по z более низкого порядка, заключается в переходе к анализу дифракции однонаправленной волны.

Обобщим уравнение (5) на случай нелинейной среды. Будем искать нелинейное укороченное уравнение в виде

$$\partial G / \partial z - i\sqrt{k^2 - k_x^2}G + \chi N(G) = 0, \quad (6)$$

где $N(G)$ – неизвестный нелинейный оператор. Для его нахождения потребуем, чтобы решение (6) являлось также решением полного спектрального уравнения (3). Продифференцировав (6) по z и выразив $\partial G / \partial z$ через G из этого же уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial z} - i\sqrt{k^2 - k_x^2}G + \chi N(G) \right) = \\ & = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)G + \chi(i\sqrt{k^2 - k_x^2}N(G) + \frac{\partial}{\partial z}N(G)) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Сопоставляя (7) с (3), для оператора $N(G)$ получаем соотношение

$$i\sqrt{k^2 - k_x^2}N(G) + \frac{\partial}{\partial z}N(G) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\alpha - k_x)G(\alpha - \beta)G(\beta)d\alpha d\beta. \quad (8)$$

Будем искать $N(G)$ в форме

$$N(G) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k_x, \alpha, \beta)G^*(\alpha - k_x)G(\alpha - \beta)G(\beta)d\alpha d\beta, \quad (9)$$

где $\varphi(k_x, \alpha, \beta)$ – неизвестная функция. Тогда, используя тот факт, что с точностью до малых более высокого порядка выполняется

$$\frac{\partial G(\alpha - \beta, z)}{\partial z} \approx i\sqrt{k^2 - (\alpha - \beta)^2}G(\alpha - \beta, z), \quad \frac{\partial G(\beta, z)}{\partial z} \approx i\sqrt{k^2 - \beta^2}G(\beta, z), \quad (10)$$

$$\frac{\partial G^*(\alpha - k_x, z)}{\partial z} \approx -i \left(\sqrt{k^2 - (\alpha - k_x)^2} \right)^* G^*(\alpha - k_x, z),$$

из соотношения (8) с учетом (9) несложно получить

$$\varphi(k_x, \alpha, \beta) = -\frac{i}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_x^2} - \left(\sqrt{k^2 - (\alpha - k_x)^2} \right)^* + \sqrt{k^2 - (\alpha - \beta)^2} + \sqrt{k^2 - \beta^2}}. \quad (11)$$

Таким образом, укороченное уравнение, описывающее динамику пространственного спектра однонаправленной световой волны, в нелинейной среде принимает вид

$$\frac{\partial G}{\partial z} - i\sqrt{k^2 - k_x^2}G =$$

$$= i \frac{\chi}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^*(\alpha - k_x)G(\alpha - \beta)G(\beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{k^2 - k_x^2} - \left(\sqrt{k^2 - (k_x - \alpha)^2}\right)^* + \sqrt{k^2 - (\alpha - \beta)^2} + \sqrt{k^2 - \beta^2}}. \quad (12)$$

Это уравнение после процедуры (7)–(11) сводится к полному уравнению (3) с точностью до слагаемых пятого порядка по G (из-за приближения (10)). Однако такая точность вполне достаточна, поскольку уравнения (2) и (3) изначально выписаны с этой же точностью [1].

Из выведенного уравнения (12) можно получить и нелинейное укороченное уравнение для поля

$$E(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k_x, z) \exp(ik_x z) dk_x.$$

Но оно более сложное, чем (12), и, даже будучи линеаризованным, является интегро-дифференциальным [5].

На рис.1 приведен один из результатов численного расчета динамики пространственного спектра гауссова на входе в среду пучка $E(x, 0) = E_0 \exp(-(x/6\lambda)^2)$. Максимальная нелинейная добавка к показателю преломления составляла $\chi|E_0|^2/2k^2 = 0.02$. Из рисунка видно, что спектр изменяется квазипериодически. На расстоянии примерно в 30 длин волн ширина спектра становится максимальной и сравнимой с волновым числом. При таком сверхуширении пространственного спектра (этот термин уместен по аналогии с термином “сверхуширение спектра” импульсов, применяемым, когда его ширина становится сравнимой с центральной частотой [6]) в нем появляются пространственные гармоники с частотами, превышающими волновое число. Для них второе слагаемое в (12) становится действительным, и таким гармоникам соответствуют экспоненциально спадающие вдоль z поля, аналогичные полям, возникающим при полном внутреннем отражении. Из уравнения (12) видно, что если второе его слагаемое действительное, то соответствующие компоненты спектра прямой волны начинают уменьшаться, и в прозрачной среде должна возникать обратная волна. Поскольку в конкретном численном эксперименте убыль энергии излучения, распространяющегося в положительном направлении оси z , из-за возникновения экспоненциально спадающих компонент поля невелика (менее 5%), то в данной работе влиянием появляющейся встречной волны на самофокусировку прямой волны мы пренебрегаем.

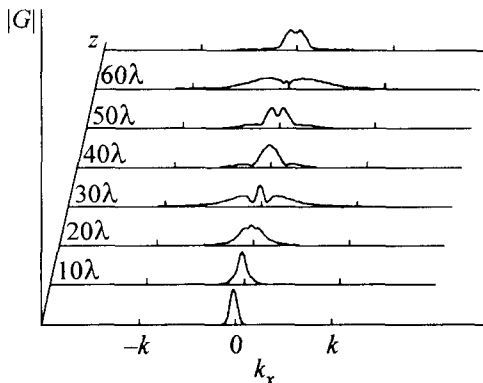


Рис.1. Динамика пространственного спектра излучения в нелинейной среде

На рис.2 приведена “мгновенная фотография” поля самофокусирующегося пучка, полученная из рассчитанной динамики спектра обратным преобразованием. Поперечный и продольный масштабы фотографии для большей наглядности различаются. Квазипериодичности в изменении пространственного спектра соответствует квазипериодичность в изменении поперечных размеров пучка. Именно в фокусах пространственный спектр приобретает высокочастотные компоненты, наличие которых обуславливает самоотражение излучения. На рис.2 дана динамика поля на большем расстоянии, чем на рис.1. Поэтому на нем виден не только колебательный характер изменения поперечной структуры поля, но и то, что эти колебания постепенно затухают с формированием квазистационарной нити с поперечными размерами, близкими к длине волны.

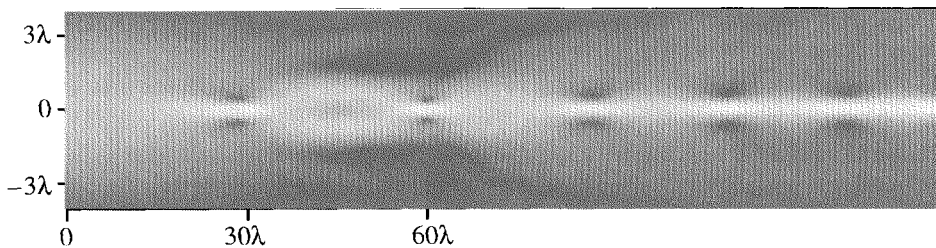


Рис.2. Мгновенная фотография светового пучка при самофокусировке

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен новый метод анализа непараксиальной самофокусировки – спектральной. Показано, что он более плодотворный, чем полевой. Метод апробирован на случай двумерной самофокусировки, которая в параксиальном приближении не носит катастрофического характера. Однако из приведенного анализа ясно, что и для коллапсирующей в этом приближении трехмерной самофокусировки фундаментальной причиной ограничения поля в фокусе будет самоотражение излучения назад.

-
1. С.Н.Власов, В.И.Таланов, *Самофокусировка волн*, Нижн. Новг.: ИПФ РАН, 1997.
 2. В.Е.Семенов, Н.Н.Розанов, Н.В.Высотина, *ЖЭТФ* **111**, 458 (1999).
 3. S.Chi and Q.Guo, *Optics Letters* **20**, 1598 (1995).
 4. M.D.Felt and J.A.Fleck, *J. Optical Society of America* **5**, 633 (1998).
 5. L.Fishman and J.J. McCoy, *J. Math. Phys.* **25**, 285 (1984).
 6. В.Г.Беспалов, С.А.Козлов, А.Н.Сутягин, Ю.А.Шполянский, *Оптический журнал* **65**, 85 (1998).