Письма в ЖЭТФ, том 70, вып.4, стр.268 - 273

ЗАКОН ОМА В КИРАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

О.Г.Чхетиани[1], *С.С.Моисеев*

Институт космических исследований

117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 мая 1999 г.

После переработки 7 июля 1999 г.

Рассмотрено движение электронов плазмы в стохастическом электромагнитном поле в пределе низкой проводимости. Показано, что при весьма общих условиях при наличии средней отличной от нуля киральности мелкомасштабного электромагнитного поля эффективный ток зависит от ротора наложенного электрического поля – $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \sigma_\kappa \mathrm{rot}\mathbf{E}$ – аналогично подобным зависимостям для векторов электрической и магнитной индукции в оптически активных и искусственных киральных средах. Подобный закон Ома при определенных условиях ведет к росту магнитного поля, структура которого зависит от проводимости среды.

PACS: 47.65+a, 52.35.Ra, 95.30.Qd

В последнее время особое внимание исследователей привлекают явления, возникающие в рамках киральной электродинамики. В качестве основы для рассмотрения таких явлений используют обобщенные законы связи между индукциями и напряженностями. Так, электрическая индукция представляется как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_\kappa \mathrm{rot}\mathbf{E}\,[1\,-\,3]. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, ε_0 – диэлектрическая проницаемость изотропной среды, а ε_κ – псевдоскалярный параметр киральности.

Нарушение зеркальной симметрии микродвижений должно также приводить к обобщению закона Ома для тока:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \sigma_\kappa \mathrm{rot}\mathbf{E}. \tag{2}$$

Здесь σ и σ_κ соответственно проводимость и параметр киральности.

Одна из возможностей появления киральности связана с асимметрией структуры вещества, в частности, с право-левой асимметрией молекул. В то же время, вещества простой структуры (например, электронно-протонная плазма) такой возможности лишены. Для них киральность может возникать либо за счет отражательно-несимметричных движений, либо за счет того, что электромагнитные поля обладают аналогичными свойствами. Для этого, например, достаточно, чтобы случайное электромагнитное поле обладало ненулевым средним $\langle \mathbf{A}\mathrm{rot}\mathbf{A}\rangle$ ($\mathbf{A}$ – вектор-потенциал, $\langle\ldots\rangle$ – среднее по ансамблю). Учет отражательно-несимметричных эффектов в токе проводился и ранее при анализе эффекта генерации крупномасштабных магнитных структур (см., например, [4], там же библиография). Однако делалось это недостаточно последовательно, что, в частности в приближении электронной магнитной гидродинамики (ЭМГД) не позволяет прийти к правильной форме закона Ома. В

[1] e-mail: ochkheti@mx.iki.rssi.ru

заключение отметим, что возможность существования (2) следует и из представления закона Ома в плазме через корреляционную функцию микротоков [5], если предположить для последней нарушение зеркальной симметрии.

Рассмотрим движение электронов в стохастическом электромагнитном поле с заданными корреляционными свойствами. Учет их инерции позволит нам доказать справедливость обобщенного закона Ома (2) в плазме со случайными киральными полями и непосредственно вычислить параметры σ, σ_κ. Мы рассматриваем случай, когда можно пренебречь движением ионов (ЭМГД-приближение).

Предполагаем, что в начальный момент времени на систему накладывается регулярное крупномасштабное неоднородное возмущение электрического поля, достаточно слабое, чтобы существенно изменить корреляционные свойства флуктуаций электромагнитных полей. Заметим, что в [6] в кинетическом приближении исследовалось поведение плазмы в полностью изотропном электромагнитном случайном киральном поле и были проанализированы свойства функции распределения заряженных частиц по скоростям. Однако в [6] среднее электрическое поле отсутствовало и закон Ома не рассматривался.

Запишем для скорости электронов $\mathbf{v}$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m_e}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right). \tag{3}$$

Разбивая электромагнитное поле на сумму крупномасштабной медленной компоненты и быстрой мелкомасштабной (с нулевым средним), записываем:

$$\mathbf{E} = \langle\mathbf{E}\rangle + \widetilde{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{B} = \langle\mathbf{B}\rangle + \widetilde{\mathbf{B}}. \tag{4}$$

Как уже говорилось выше,

$$|\langle\mathbf{E}\rangle| \ll \left\langle\widetilde{\mathbf{E}}^2\right\rangle^{1/2}, \ |\langle\mathbf{B}\rangle| \ll \left\langle\widetilde{\mathbf{B}}^2\right\rangle^{1/2}.$$

Переходя в Фурье-представление, записываем

$$-iw\,\langle\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{k},w)\rangle = \frac{e}{m_e}\left(\left\langle\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{k},w)\right\rangle + \frac{1}{c}\int\left[\left\langle\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{q},s)\times\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)\right\rangle\right]d\mathbf{q}ds\right). \tag{5}$$

Корреляция $\left\langle\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{q},s)\times\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)\right\rangle$ выражается через куммулянты стохастического магнитного поля по формуле Фуруцу – Новикова – Донскера [7]:

$$\left\langle\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{q},s)\times\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)\right\rangle_i = \varepsilon_{ijk}\int\left\langle\frac{\delta\widehat{v}_j(\mathbf{q},s)}{\delta\widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')}\right\rangle\times$$

$$\times\left\langle\widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')\widehat{B}_k(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)\right\rangle d\mathbf{k}'dw' + \varepsilon_{ijk}\int\left\langle\frac{\delta^2\widehat{v}_j(\mathbf{q},s)}{\delta\widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')\delta\widehat{B}_n(\mathbf{k}'',w'')}\right\rangle\times$$

$$\times\left\langle\widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')\widehat{B}_n(\mathbf{k}'',w'')\widehat{B}_k(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)\right\rangle d\mathbf{k}'d\mathbf{k}''dw'dw'' + \ldots \tag{6}$$

Вариационная производная $\left\langle \frac{\delta \widehat{v}_j(\mathbf{q},s)}{\delta \widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')} \right\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$-is\left\langle \frac{\delta \widehat{v}_j(\mathbf{q},s)}{\delta \widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')} \right\rangle = -\frac{es}{m_e c}\varepsilon_{jlm}\frac{q_l}{q^2}\delta(s-w')\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k}')+$$

$$+\frac{e}{m_e c}\varepsilon_{jlm}\langle \widehat{v}_l(\mathbf{q}-\mathbf{k}',s-w')\rangle+\frac{e}{m_e c}\varepsilon_{jlr}\int \left\langle \frac{\delta \widehat{v}_l(\mathbf{q}',s')}{\delta \widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')} \right\rangle \left\langle \widehat{B}_r(\mathbf{q}-\mathbf{q}',s-s')\right\rangle d\mathbf{q}'ds'+$$

$$+\frac{e}{m_e c}\varepsilon_{jlr}\left\langle \frac{\delta^2 \widehat{v}_l(\mathbf{q}',s')}{\delta \widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')\delta \widehat{B}_n(\mathbf{q}'-\mathbf{q},s'-s)} \right\rangle \hat{Q}_{nr}(\mathbf{q}-\mathbf{q}',s-s'). \tag{7}$$

Здесь

$$\left\langle \widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')\widehat{B}_k(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)\right\rangle = \hat{Q}_{mk}(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}+\mathbf{k}')\,\delta(w-s+w'). \tag{8}$$

Для однородных изотропных гиротропных флуктуаций корреляционный тензор имеет вид

$$\widehat{Q}_{mk}(\mathbf{q},s) = \left(\delta_{mk}-\frac{q_m q_k}{q^2}\right)\frac{E_M(q,s)}{4\pi q^2}+i\frac{H_M(q,s)}{8\pi q^4}\varepsilon_{mkt}q_t. \tag{9}$$

Уравнение для второй вариационной содержит третью и т.д. Задача в общем случае незамкнута. Для учета не малых времен корреляции можно воспользоваться последовательной процедурой, предложенной в [8]. В настоящей работе мы ограничимся пределом δ-коррелированных по времени флуктуаций. В этом случае в (6) остается первый член, что совпадает с гауссовым приближением. Это является хорошим приближением и для малых времен корреляции. При этом в (7) последнее слагаемое равно нулю. Тогда, учитывая неоднородность среднего магнитного поля с точностью до второго порядка по теории возмущений, получаем:

$$\left\langle \frac{\delta \widehat{v}_j(\mathbf{q},s)}{\delta \widehat{B}_m(\mathbf{k}',w')} \right\rangle = -i\frac{e}{m_e c}\varepsilon_{jlm}\frac{q_l}{q^2}\delta(s-w')\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k}')+i\frac{e}{sm_e c}\varepsilon_{jlm}\langle \widehat{v}_l(\mathbf{q}-\mathbf{k}',s-w')\rangle+$$

$$+\frac{1}{s}\left(\frac{e}{m_e c}\right)^2\varepsilon_{jlr}\varepsilon_{lpm}\frac{k'_p}{k'^2}\left\langle \widehat{B}_r(\mathbf{q}-\mathbf{k}',s-w')\right\rangle. \tag{10}$$

Более высокими порядками в предположении малости возмущений средних полей и токов можно пренебречь. Подставляя (10) в (5) и проинтегрировав по $\mathbf{q}, s$, в пределе δ-коррелированного по времени случайного процесса (временная часть корреляционной функции равна $2\tau_{cor}\delta(t-t')$),получаем, что осредненное уравнение движения электрона в слабом неоднородном электрическом поле на фоне однородных флуктуаций электромагнитного фона имеет вид

$$\left(-iw+\frac{2}{3}\left(\frac{e}{m_e c}\right)^2\langle \mathbf{B}^2\rangle \tau_{cor}\right)\langle \widehat{\mathbf{v}}\rangle = \frac{e}{m_e}\left(\left\langle \widehat{\mathbf{E}}\right\rangle - \frac{2}{3}\frac{e}{m_e}\left(\frac{e}{m_e c}\right)^2\frac{\tau_{cor}}{iw}\langle \mathbf{AB}\rangle i\times\right.$$

$$\times\left[\mathbf{k}\times\left\langle\widehat{\mathbf{E}}\right\rangle\right]+\frac{2}{3}\frac{e}{m_e}\left(\frac{e}{m_e c}\right)^2\frac{\tau_{cor}}{iw}\left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle\left[\mathbf{k}\times\left[\mathbf{k}\times\left\langle\widehat{\mathbf{E}}\right\rangle\right]\right]\Bigg), \tag{11}$$

где эффективные транспортные коэффициенты непосредственно связаны со средней энергией, спиральностью и квадратом вихревой составляющей вектор-потенциала стохастического магнитного поля ($\mathrm{rot}\mathbf{A}=\mathbf{B}$):

$$\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle=\int E_M(q)dq,\quad \left\langle\mathbf{AB}\right\rangle=\int\frac{H_M(q)}{q^2}dq,\quad \left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle=\int\frac{E_M(q)}{q^2}dq. \tag{12}$$

Отметим, что для сходимости указанных средних требуется, чтобы $E_M(q)$ убывало бы на бесконечности быстрее, чем q^{-1}, и при $q\to 0$ вело бы себя как q^m, гдеt $m\geq 1$. Последнее ограничение относится и к $H_M(q,s)$. При расчетах использовалась связь полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ через уравнение Максвелла, записываемом в фурье-представлении как $\widehat{\mathbf{B}}=\frac{c}{w}\left[\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{E}}\right]$, и разложение тензора $\widehat{Q}_{mk}(\mathbf{k}-\mathbf{q},w-s)=\widehat{Q}_{km}(\mathbf{q}-\mathbf{k},s-w)$ в ряд по $k\ll q$.

В рамках функционального подхода нетрудно провести и учет негауссовых эффектов. Отметим, что, как правило, они приводят к перенормировке эффективных транспортных коэффициентов, полученных в гауссовом или короткокоррелированном приближении [9–11].

Определяя средний квадрат ларморовской частоты флуктуаций магнитного поля как $\overline{w_L^2}=\left\langle\frac{e\mathbf{B}}{m_e c}\right\rangle^2$, записываем для тензора проводимости $j_i(\mathbf{k},w)=\widehat{\sigma}_{il}(\mathbf{k},w)E_l(\mathbf{k},w)$:

$$\widehat{\sigma}_{il}(\mathbf{k},w)=\frac{ne^2}{\left(-iw+\frac{2}{3}\left(\frac{e}{m_e c}\right)^2\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle\tau_{cor}\right)m_e}\left[\left(1-\frac{2}{3}\frac{\overline{w_L^2}\tau_{cor}}{iw}\frac{\left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle}{\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle}k^2\right)\delta_{il}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\frac{\overline{w_L^2}\tau_{cor}}{iw}\frac{\left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle}{\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle}k_i k_l-\frac{2}{3}\frac{\overline{w_L^2}\tau_{cor}}{iw}\frac{\left\langle\mathbf{AB}\right\rangle}{\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle}i\varepsilon_{irl}k_r\right]. \tag{13}$$

Учет частоты столкновений частиц $\nu=1/\tau$ приводит к замене $-iw\to(-iw+\nu)$, откуда

$$\mathbf{j}(k,0)=\left(\sigma+\sigma_* k^2\right)\left\langle\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{k},w)\right\rangle-\sigma_*\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\left\langle\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{k},w)\right\rangle\right)+i\sigma_\kappa\left[\mathbf{k}\times\left\langle\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{k},w)\right\rangle\right], \tag{14}$$

где

$$\sigma=\frac{ne^2\tau}{\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{e}{m_e c}\right)^2\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle\tau_{cor}\tau\right)m_e},\quad \sigma_\kappa=\frac{2}{3}\frac{\left\langle\mathbf{AB}\right\rangle}{\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle}\overline{w_L^2}\tau_{cor}\tau\cdot\sigma,$$

$$\sigma_*=\frac{2}{3}\frac{\left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle}{\left\langle\mathbf{B}^2\right\rangle}\overline{w_L^2}\tau_{cor}\tau\cdot\sigma. \tag{15}$$

После обратного Фурье-преобразования получаем для тока

$$\mathbf{j}=\sigma\left\langle\mathbf{E}\right\rangle+\sigma_\kappa\mathrm{rot}\left\langle\mathbf{E}\right\rangle-\sigma_*\Delta\left\langle\mathbf{E}\right\rangle+\sigma_*\nabla\mathrm{div}\left\langle\mathbf{E}\right\rangle. \tag{16}$$

Таким образом, эффективный закон Ома в флуктуационном электромагнитном поле с ненулевой средней киральностью (спиральностью) в самом деле имеет вид (2), схожий с зависимостями для индукции и намагниченности в оптически активных и киральных средах.

Рассмотрим эволюцию среднего магнитного поля в среде с флуктуирующим электромагнитным полем с ненулевой киральностью, используя полученный закон Ома. Рассматривая задачу в фурье-представлении, введем линейный оператор

$$\widehat{L}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\sigma_*}{\sigma + \sigma_* k^2} k_i k_j + i \frac{\sigma_\kappa}{\sigma + \sigma_* k^2} \varepsilon_{ilj} k_l. \tag{17}$$

Для обратного оператора $\widehat{L}^{-1}$ имеем:

$$\widehat{L}_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij} - i(\sigma_\kappa/(\sigma + \sigma_* k^2))\left(1 - \sigma_* k^2/(\sigma + \sigma_* k^2)\right) \varepsilon_{ilj} k_l}{\left(1 - (\sigma_\kappa/(\sigma + \sigma_* k^2))^2 k^2\right)} +$$
$$+ \frac{\left(\sigma_*/(\sigma + \sigma_* k^2) - (\sigma_\kappa/(\sigma + \sigma_* k^2))^2\right) k_i k_j}{(1 - \sigma_* k^2/(\sigma + \sigma_* k^2))\left(1 - \left(\frac{\sigma_\kappa}{\sigma + \sigma_* k^2}\right)^2 k^2\right)}. \tag{18}$$

В пренебрежении током смещения электрическое поле $\widehat{\mathbf{E}}$ равно

$$\widehat{\mathbf{E}} = \frac{ic}{4\pi(\sigma + \sigma_* k^2)} \widehat{L}^{-1} \left[\mathbf{k} \times \widehat{\mathbf{B}}\right]. \tag{19}$$

и замкнутое уравнение для $\widehat{\mathbf{B}}$ принимает вид

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{c^2 k^2}{4\pi(\sigma + \sigma_* k^2)} \frac{\left(\widehat{\mathbf{B}} - is\left[\mathbf{k} \times \widehat{\mathbf{B}}\right]\right)}{1 - s^2 k^2}, \tag{20}$$

где

$$s = \frac{\sigma_\kappa}{\sigma + \sigma_* k^2}.$$

Уравнение (20) нелокальное. На первый взгляд, дополнительный роторный член находится за пределами точности по масштабам – он порядка k^3 и как им, так и следующим дополнительным слагаемым в уравнении для среднего крупномасштабного магнитного поля можно было бы пренебречь. Однако рассматривая решение в виде

$$\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, 0) \exp(\gamma t),$$

получаем для инкремента

$$\gamma_{1,2} = -\frac{c^2 k^2}{4\pi(\sigma + \sigma_* k^2 \pm \sigma_\kappa k)}. \tag{21}$$

Как видно из (21), зависимость инкремента от волнового числа в действительности не превосходит k^2 . В зависимости от значений коэффициентов σ, σ_* и σ_κ возможны следующие ситуации: 1) при $|\sigma_\kappa| < 2(\sigma\sigma_*)^{1/2}$ возмущения среднего магнитного поля затухают для всех значений k ; 2) при $|\sigma_\kappa| \geq 2(\sigma\sigma_*)^{1/2}$ возможен экспоненциальный рост магнитного поля на масштабах

$$\frac{|\sigma_\kappa| - \left(\sigma_\kappa^2 - 4\sigma\sigma_*\right)^{1/2}}{2\sigma_*} < k < \frac{|\sigma_\kappa| + \left(\sigma_\kappa^2 - 4\sigma\sigma_*\right)^{1/2}}{2\sigma_*}. \tag{22}$$

Особенностью данной неустойчивости является существование пороговых минимальных и максимальных масштабов неустойчивых мод. Если мы введем характерный масштаб флуктуационного магнитного поля λ и характерный киральный масштаб λ_κ , то характерный масштаб неустойчивых мод будет порядка $l \sim 2\lambda^2/\lambda_\kappa$. Может оказаться, что неустойчивость среднего поля будет развиваться как в крупномасштабной области, так и на границе или внутри интервала диссипации. Тем самым мы видим, что, наряду с процессами обратного каскада могут возникать и процессы прямого каскада – коротковолновая генерация среднего магнитного поля.

Полученная неустойчивость свидетельствует в пользу того, что при наличии достаточного уровня флуктуационной киральности возможны процессы роста когерентных возмущений магнитного поля и в ситуации, обратной случаям высокой проводимости (рассмотренных, например, в [4] и также связанных с киральностью). Общий случай и граница, где сравниваются обе возможности, будут предметом дальнейшего исследования.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант #98–02–17229) и INTAS (совместный проект Грузия - INTAS 504).

---

1. Ф.И.Федоров, *Теория гиротропии, Минск: Наука и техника*, 1976.
2. *Recent advances in electromagnetic theory*, Eds. N.H.Kritikos and D.L.Jaggard, Springer–Verlag, 1990.
3. H.T.Silva, P.H.Sakanaka, and N.Reggianni, J.of Phys. Soc. Japan **67**, 850 (1998).
4. С.И.Вайнштейн, Я.Б.Зельдович, А.А.Рузмайкин, *Турбулентное динамо в астрофизике*, М.: Наука, 1980.
5. В.Д.Шафранов, Вопросы теории плазмы **3**, 3 (1963).
6. A.V.Chechkin, V.V.Yanovsky, and A.V.Tur, Phys. Plasmas **1** (8), 2566 (1994).
7. Е.А.Новиков, ЖЭТФ **47**, 1919 (1964).
8. В.И.Кляцкин, В.И.Татарский, Изв.вузов.Радиофизика **15**, 1433 (1972).
9. E.Knobloch, J.Fluid Mech. **83**, 129 (1977).
10. B.Nicklaus and M.Stix, Geophys.Astrophys.Fluid Dynamics **43**, 149 (1989).
11. A.V.Belian, O.G.Chkhetiani, and S.S.Moiseev, Препринт ИКИ РАН N–1957 (1996).