Письма в ЖЭТФ, том 70, вып.9, стр.577 - 582

НЕМАРКОВСКИЙ ХАРАКТЕР РАССЕЯНИЯ И УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СОУДАРЕНИЙ В ПЛАЗМЕ

С.Н.Гордиенко

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Российский научный центр "Курчатовский институт"
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 сентября 1999 г.

Показано, что рассеяние пробной частицы в плазме не всегда описывается диффузионным процессом из-за немарковского характера передачи импульса. Существуют три различных этапа в торможении частицы плазмой: этапы, относящиеся к малым и большим временам, когда рассеяние носит недиффузионный характер, и этап промежуточных времен, когда рассеяние может быть описано диффузионным процессом. Механизм, ответственный за недиффузионность рассеяния на больших временах, приводит к новому условию применимости классической механики для описания столкновений в плазме $v_T > \hbar^2\omega_{pe}/m_e e^2 L$, где L — кулоновский логарифм, e, m_e, ω_{pe} — заряд, масса электрона и плазменная частота, соответственно. Высокотемпературная почти идеальная плазма является примером среды, в которой множественный характер соударений делает применимым классическое описание даже тогда, когда бинарные столкновения должны описываться квантовой механикой (борновским приближением), то есть плазма демонстрирует возможность подавления квантовых эффектов коллективным взаимодействием.

PACS: 52.20.Fs, 52.25.Dg

Предположение о диффузионном характере (в импульсном пространстве) динамики частиц, составляющих плазму, является одним из ключевых моментов в получении различных типов интегралов столкновений для плазмы. Кажется достаточно естественным, что при временах, превышающих время пролета пробной частицей расстояния порядка дебаевского радиуса, процесс торможения должен стать марковским, а специфика кулоновского рассеяния — уменьшение передачи импульса при парном соударении с ростом относительной скорости — обеспечит диффузионность процесса торможения для почти идеальной плазмы. Однако рассмотрение множественных кулоновских соударений в флуктуирующем плазменном микрополе не было проведено, исходя из уравнений движения. В литературе никогда не рассматривался вопрос о возможности немарковского торможения при больших временах и то, с каким механизмом "памяти" может быть связано подобное явление, хотя недиффузионность рассеяния при малых временах была известна [1].

Как правило, задача о рассеянии частиц решалась в предположении о возможности свести соударения частиц в плазме к бинарным после учета дебаевской экранировки кулоновского взаимодействия [1 – 3]. Метод работы [4], основанный на вычислении функции распределения переданного импульса в пределе бесконечно большого кулоновского логарифма, позволил выявить нетривиальную физику в области малых масштабов, однако он оказывается недостаточным для рассмотрения вопроса об условиях применимости квазиклассического описания в почти идеальной плазме и возможности описания торможения марковским процессом.

1. Рассмотрим пробную частицу с зарядом Z_0, массой M и скоростью v, направленной вдоль оси z, движущуюся по плазме, состоящей из электронов (заряд e и масса m_e) и ионов с зарядами Z и массами m_i. Будем для краткости считать, что скорость v значительно превышает тепловые скорости электронов и ионов. Тогда в соответствии с [4] при временах τ, подчиненных неравенству $\tau < r_D/v$, где r_D — дебаевский радиус, для функции распределения изменения импульса $\Delta\mathbf{p}$ пробной частицы за время τ находим

$$f_\tau(\Delta\mathbf{p}) = \int p(\mathbf{u}) \exp(i(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{p})) \frac{d\mathbf{u}}{(2\pi)^3}, \tag{1}$$

где $p(\mathbf{u}) = \exp(nU_e(\mathbf{u})) \exp(nU_i(\mathbf{u}))$,

$$U_e = -\frac{2\pi Z_0^2 e^4 \tau}{v} u_z^2 - \frac{\pi Z_0^2 e^4 \tau}{v}(u_x^2 + u_y^2) \ln\left(\frac{v^4\tau^2}{Z_0^2 e^4 (u_x^2 + u_y^2)}\right),$$

$$U_i = -\frac{2\pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau}{v} u_z^2 - \frac{\pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau}{v}(u_x^2 + u_y^2) \ln\left(\frac{v^4\tau^2}{Z_0^2 Z^2 e^4 (u_x^2 + u_y^2)}\right).$$

Выражение (1) получено вычислением переданного пробной частице импульса, исходя только из второго закона Ньютона [4]. При этом движение пробной частицы предполагалось прямолинейным, что допустимо при временах, много меньших времени свободного пробега пробной частицы. Поскольку характеристическая функция представляется в виде произведения характеристических функций, описывающих рассеяние пробной частицы на электронах и ионах, то рассеяния на электронах и ионах являются статистически независимыми. В связи с этим достаточно ограничиться изучением функции распределения импульса, переданного электронами:

$$f_\tau^{(e)} = \int \exp(nU_e(\mathbf{u}) - i(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{p})) \frac{d\mathbf{u}}{(2\pi)^3}, \tag{2}$$

что и будет делаться в дальнейшем. Однако для полноты укажем, что поскольку функция распределения импульса $f_\tau^{(i)}$, переданного ионами, определяется аналогичным выражением

$$f_\tau^{(i)} = \int \exp(nU_i(\mathbf{u})/Z - i(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{p})) \frac{d\mathbf{u}}{(2\pi)^3},$$

то функция распределения полного переданного импульса $f_\tau(\Delta\mathbf{p})$ дается сверткой функций распределения импульса, переданного электронами и ионами:

$$f_\tau(\Delta\mathbf{p}) = \int f_\tau^{(i)}(\Delta\mathbf{p} - \mathbf{x}) f_\tau^{(e)}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

2. Функция $f_\tau^{(e)}$ может быть исследована аналитически. После вычислений находим, что указанная функция распределения имеет гауссовский участок

$$f_\tau^{(e)}(\Delta\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} p_0^2 p_1} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2p_1^2} - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2p_0^2}\right), \tag{3}$$

где $p_x^2 + p_y^2 < 2p_0^2 \ln(\Lambda/4)$, Λ определяется как решение уравнения $\Lambda = \ln\left(2\pi\Lambda n (v\tau)^3\right) \gg 1$, $p_0^2 = 2\pi n Z_0^2 e^4 \Lambda\tau/v$, $p_1^2 = 2p_0^2/\Lambda$ и степенной "хвост" по попе-

речной передаче импульса

$$f_\tau^{(e)}(\Delta\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2p_1^2}\right) \frac{p_1}{(p_x^2+p_y^2)^2} \tag{4}$$

при $p_x^2 + p_y^2 > 2p_0^2 \ln(\Lambda/4)$, $\Delta\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

Гауссовская часть функции распределения (3) и степенная асимптотика (4) имеют различный механизм формирования. Гауссовская часть возникает из-за многократных актов рассеяния с малыми передачами импульса, то есть из-за рассеяния на флуктуационном внутриплазменном электрическом поле, а степенной хвост возникает из-за отдельных парных соударений с малыми прицельными расстояниями. Таким образом, в действительности степенной хвост простирается не до бесконечности, а лишь до максимально возможной передачи импульса при парном соударении, то есть до величины порядка $p^* \sim 2m_e v$ (если $p^{*2} < 2p_0^2 \ln(\Lambda/4)$, то степенной "хвост" вообще отсутствует).

Заметим, что второй момент переданного импульса, связанный с гауссовой частью функции распределения (3), равен

$$\left\langle (\Delta\mathbf{p})^2 \right\rangle_G = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4 \tau}{v} \ln(2\pi\Lambda n (v\tau)^3). \tag{5}$$

Со степенным "хвостом" функции распределения связана лишь очень малая часть общего числа частиц (порядка $1/\Lambda \ln(\Lambda/4)$), однако вклад этих частиц во второй момент, вообще говоря, не мал. Так второй момент, связанный со степенным "хвостом", равен

$$\left\langle (\Delta\mathbf{p})^2 \right\rangle_t = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4 \tau}{v} \ln\left(\frac{m_e^2 v^3}{\pi n e^4 Z_0^2 \tau \Lambda \ln(\Lambda/4)}\right). \tag{6}$$

3. Вычислим функцию распределения переданного импульса при временах $\tau \gg r_D/v$. При таких временах необходимо принять во внимание дебаевское экранирование, то есть для вычислений лишь с логарифмической точностью можно считать, что электрическое поле в данной точке создается лишь частицами, находящимися от нее на расстоянии, не превышающем дебаевский радиус r_D. Простые вычисления показывают, что для этого достаточно использовать в (1) и (2) вместо функций U_e и U_i новые функции $U_e^{(D)}$ и $U_i^{(D)}$, где

$$U_e^{(D)} = -\frac{\pi Z_0^2 e^4 \tau}{v}(u_x^2+u_y^2) \ln\left(\frac{r_D^2 v^2}{Z_0^2 e^4 (u_x^2+u_y^2)}\right), \tag{7}$$

$$U_i^{(D)} = -\frac{\pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau}{v}(u_x^2+u_y^2) \ln\left(\frac{r_D^2 v^2}{Z_0^2 Z^2 e^4 (u_x^2+u_y^2)}\right). \tag{8}$$

Вычисление функции распределения $f_\tau^{(e)}$ переданного электронами импульса может быть проведено в явном виде. Таким образом получаем, что

$$f_\tau^{(e)}(\Delta\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi p_0^2} \delta(p_z) \exp\left(-\frac{p_x^2+p_y^2}{2p_0^2}\right), \tag{9}$$

где $p_x^2 + p_y^2 < 2p_0^2 \ln(L/4)$, $L = \ln\left(2\pi L r_D^2 v\tau\right) \gg 1$, $p_0^2 = 2\pi n Z_0^2 e^4 L\tau/v$, и степенной "хвост" по поперечной передаче импульса

$$f_\tau^{(e)}(\Delta\mathbf{p}) = \frac{2}{\pi L}\delta(p_z)\frac{p_0^2}{(p_x^2+p_y^2)^2} \tag{10}$$

при $p^{*2} > p_x^2 + p_y^2 > 2p_0^2\ln(L/4)$, $\Delta\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, а при временах $\tau > \tau^* = m_e^2 v^3/L\ln(L/4)\pi n e^4 Z_0^2$, таких, что $p^{*2} < 2p_0^2\ln(L/4)$, степенная часть асимптотики (10) отсутствует.

Специально подчеркнем, что время τ^* параметрически меньше времени свободного пробега пробной частицы в плазме, что гарантирует применимость излагаемого подхода при таких временах. Обращает на себя внимание множитель $\delta(p_z)$ в (9) и (10). Возникновение δ-функции имеет простой физический смысл: внутри дебаевской сферы существуют флуктуации внутриплазменного потенциала, что приводит к изменению кинетической энергии частицы и гауссовому распределению p_z в (3) и (4). Однако связанные с рельефом внутриплазменного потенциала флуктуации кинетической энергии и p_z не нарастают с увеличением времени τ при $\tau > r_D/v$, а когда они становятся много меньшими поперечных флуктуаций импульса, в используемом приближении возникает соответствующая δ-функция. Вычисление энергетических потерь (силы трения) требует учета не только флуктуационного, но и поляризационного электрического поля, то есть вычислений более высокого порядка по константе связи [2].

Вычисление вторых моментов, связанных с гауссовой частью функции распределения (9) и степенным "хвостом", дает соответственно

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p})^2\right\rangle_G = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4\tau}{v}\ln\left(2\pi L n r_D^2 v\tau\right), \tag{11}$$

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p})^2\right\rangle_t = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4\tau}{v}\ln\left(\frac{m_e^2 v^3}{\pi n Z_0^2 \tau L\ln(L/4)}\right), \tag{12}$$

когда $r_D/v < \tau < \tau^*$, а при $\tau > \tau^*$

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p})^2\right\rangle_G = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4\tau}{v}\ln\left(2\pi L n r_D^2 v\tau\right) \tag{13}$$

и $\left\langle(\Delta\mathbf{p})^2\right\rangle_t = 0$, так как при таких временах τ степенной "хвост" вообще отсутствует.

4. Полный второй момент переданного импульса определяется суммой вкладов от гауссовой части функции распределения и степенного "хвоста", то есть

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p})^2\right\rangle = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4\tau}{v}\ln\left(\frac{2m_e^2 v^6\tau^2}{e^4 Z_0^2\ln(\Lambda/4)}\right) \text{ при } \tau < r_D/v, \tag{14}$$

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p})^2\right\rangle = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4\tau}{v}\ln\left(\frac{2m_e^2 v^4 r_D^2}{e^4 Z_0^2\ln(L/4)}\right) \text{ при } r_D/v < \tau < \tau^*, \tag{15}$$

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p})^2\right\rangle = \frac{4\pi n Z_0^2 e^4\tau}{v}\ln\left(2\pi L n r_D^2 v\tau\right) \text{ при } \tau^* < \tau. \tag{16}$$

Согласно (14) – (16), процесс передачи импульса можно считать марковским лишь при $r_D/v < \tau < \tau^*$. Область малых времен $\tau < r_D/v$ всегда является существенно немарковской, а роль немарковских эффектов с точки зрения величины второго

момента переданного импульса при больших временах $\tau > \tau^*$ определяется величиной параметра $M^2 \ln(L/4)/m_e^2$, на чем мы не станем останавливаться подробнее. Немарковское поведение всегда обусловлено тем или иным механизмом памяти. Немарковость (недиффузионность) рассеяния при малых временах, обнаруженная в [1], связана с тем, что частицы сохраняют память о длине своего пробега [1]. Немарковость при больших временах (16) возникает из-за того, что гауссовская часть функции распределения помнит о времени полета частицы, а при $\tau > \tau^*$ гауссовская часть "поглощает" степенной хвост функции распределения, который при промежуточных временах $r_D/v < \tau < \tau^*$ "скрывает" немарковский характер рассеяния большинства частиц.

Интересно отметить, что выражения (14)–(16) явно демонстрируют коллективную природу подлогарифмического выражения в кулоновском логарифме наличием $\ln(\Lambda/4)$, $\ln(L/4)$ и L в подлогарифмических выражениях (это параметры, а не числа!), причем сохранение этих множителей под логарифмом не является превышением точности.

5. Гауссовская часть функции распределения переданного импульса, ответственная за немарковское рассеяние на больших временах, принципиально изменяет условия применимости квазиклассического приближения к описанию соударений в плазме и других системах кулоновских частиц. В самом деле, рассмотрим $\tau \sim r_D/v$ (время пролета пробной частицей области взаимодействия). Для применимости квазиклассического описания достаточно, чтобы квазиклассическим образом можно было описывать парные соударения с достаточно большой передачей импульса p, где $p^2 > 2p_0^2(r_D/v)\ln L(r_D/v)$ (величины $p_0^2(\tau)$ и $L(\tau)$ берутся при $\tau = r_D/v$), а также чтобы квазиклассическое описание было применимо для описания множественного рассеяния на внутриплазменном поле (гауссовой части функции распределения) с характерной передачей импульса $p_0(r_D/v)$. Таким образом, для квазиклассического описания соударений в плазме достаточно выполнения условия невырожденности $n^{1/3}\hbar/m_e v_T < 1$, а также неравенства

$$r_D\, p_0(r_D/v) > \hbar, \tag{17}$$

заменяющего условие $e^2/\hbar v > 1$, возникающее при описании соударения двух кулоновских частиц. Таким образом, условие применимости классической механики для описания соударений в невырожденной почти идеальной плазме может быть записано в форме

$$v_T > \frac{1}{L}\frac{\hbar^2}{m_e e^2}\omega_{pe}, \tag{18}$$

где v_T — тепловая скорость электронов, ω_{pe} — плазменная частота. Новое условие применимости классической механики к описанию соударений частиц в плазме (18) принципиально отличается от условия $e^2/\hbar v_T > 1$, следующего из предположения о сводимости кулоновского взаимодействия в плазме к бинарным соударениям. В самом деле, условие (18) показывает, что при высоких температурах плазма корректно описывается квазиклассическим, а не борновским приближением, что принципиально важно при построении диаграммной техники для кулоновских систем.

Таким образом, корректный учет множественного характера кулоновского рассеяния в плазме позволяет обнаружить принципиально новое физическое явление: из-за того, что рассеяние на малые углы является множественным, а лишь рассея-

ние на сравнительно большие углы определяется парными соударениями, критерий квазиклассичности малоугольного рассеяния $e^2/\hbar v_T > 1$ при парных столкновениях кулоновских частиц не имеет отношения к применимости квазиклассического приближения к описанию соударений в плазме и заменяется условием (18). В самом деле, согласно [2] при кулоновском соударении с рассеянием на угол, значительно превышающий дифракционный угол $\hbar/m_e v_T r_D$, квантовомеханические эффекты несущественны. Иными словами, плазма по сравнению с другими состояниями вещества проявляет замечательное свойство: несмотря на то, что бинарные столкновения должны при высоких температурах описываться в борновском приближении, то есть являются существенно квантовыми, учет множественного характера рассеяния (коллективных эффектов) делает корректным чисто классическое описание динамики.

6. Результаты строгого аналитического рассмотрения, приведенные выше, полезно проиллюстрировать простыми качественными соображениями, раскрывающими физический смысл проделанных вычислений. Если пробный электрон, движущийся со скоростью v_T, рассеивается на заряде e^*, то условием квазиклассического описания такого рассеяния является неравенство $ee^*/\hbar v_T > 1$. Если рассеяние происходит на одном единственном заряде e^*, то последнее неравенство представляет собой строгий результат. Однако в случае плазмы необходимо еще ответить на вопрос, какой заряд следует подставлять в последнее неравенство вместо e^*, то есть выяснить, что в случае многочастичной системы играет роль заряда e^*. Теория парных соударений предполагает, что в качестве e^* необходимо принять заряд единичного электрона, на котором в данный момент времени рассеивается пробный электрон. Учет множественного характера кулоновских соударений в плазме изменяет этот результат. В самом деле, в данный момент времени пробный электрон эффективно взаимодействует со всеми частицами в сфере дебаевского радиуса, то есть с $N_D \sim nr_D^3$ частицами. Иными словами, на него действует весь нескомпенсированный заряд дебаевской сферы, который может быть оценен по флуктуации полного числа частиц в сфере дебаевского радиуса и составляет величину порядка $e\sqrt{N_D}$. Интуитивно кажется естественным, а приведенный строгий анализ подтверждает это, что в качестве e^* в плазме необходимо принять именно $e^* \sim e\sqrt{N_D}$. Использование такого значения e^* позволяет сразу же получить (18), но без множителя $1/L$, возникающего из-за пространственного распределения "эффективного" заряда $e^* \sim e\sqrt{N_D}$.

Автор выражает искреннюю благодарность С.И.Анисимову, В.И.Когану, В.Д.Шафранову и Э.И.Юрченко за интерес к работе и обсуждение затронутых в ней вопросов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант #98-02-17441) и Совета по программе поддержки ведущих научных школ (грант #96-15-96448).

---

1. В.И.Коган, ДАН СССР **135**, 1374 (1960).
2. Д.В.Сивухин, *Вопросы теории плазмы*, вып.4, М.: Госатомиздат, 1964.
3. В.Д.Шафранов, *Вопросы теории плазмы*, вып.3, М.: Госатомиздат, 1963.
4. С.Н.Гордиенко, Письма в ЖЭТФ **70**, 18 (1999).