Письма в ЖЭТФ, том 70, вып.10, стр.648 - 653

КОНФОРМНЫЕ БЛОКИ И КОРРЕЛЯТОРЫ В БОЗОНИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ВЗНВ

К.А.Сарайкин[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау, 117334 Москва, Россия

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 октября 1999 г.

Рассматриваются решения уравнений Книжника – Замолодчикова как конформные блоки $SU(2)$-модели Весса – Зумино – Новикова – Виттена на сфере. Предложено действие, позволяющее находить N-точечные корреляторы модели, строя их естественным образом из конформных блоков. Это действие трех свободных полей, возмущенных некоторым специальным маргинальным оператором. Описанная конструкция должна обобщаться на случай других групп и поверхностей старших родов.

PACS: 11.25.Hf

1. Модель ВЗНВ [1, 2] – это двумерная конформная теория поля с дополнительной алгебраической симметрией Каца – Муди. Выделенность этой модели обусловлена тем, что все известные рациональные конформные теории поля могут быть получены из нее при помощи косет-конструкции [3] или редукцией по Дринфельду – Соколову [4]. Примарные поля $\Phi^{m_i\bar{m}_i}_{\Delta_i,\bar{\Delta}_i}$ модели ВЗНВ с конформными размерностями $(\Delta_i,\bar{\Delta}_i)$ принадлежат тензорному произведению двух конечномерных представлений полупростой групы Ли. "Левому" представлению соответствует индекс m_i, а "правому" – $\bar{m}_i$. Корреляторы примарных полей, в соответствии с основными идеями конформной теории поля [5], обладают свойством голоморфной факторизации:

$$\left\langle\Phi^{m_1\bar{m}_1}_{\Delta_1,\bar{\Delta}_1}(z_1,\bar{z}_1)\dots\Phi^{m_N\bar{m}_N}_{\Delta_N,\bar{\Delta}_N}(z_N,\bar{z}_N)\right\rangle_{WZNW}=$$
$$=\sum_{a,b}C^{ab}\mathcal{F}^{m_1\dots m_N}_a(z_1,\dots,z_N)\overline{\mathcal{F}^{\bar{m}_1\dots\bar{m}_N}_b(z_1,\dots,z_N)}, \qquad (1)$$

поэтому основными объектами теории становятся так называемые конформные блоки $\mathcal{F}^{m_1\dots m_N}_a(z_1,\dots,z_N)$. Их можно находить при помощи метода бозонизации [6, 7], основанном на выборе определенной параметризации элемента группы. При подходящей параметризации действие становится квадратичным по полям, а возникающие при этом ограничения на область интегрирования в функциональном интеграле могут быть описаны как вставка под корреляторы так называемых экранирующих операторов (интегралов от некоторых 1-форм по нестягиваемым контурам). Однако такая конструкция не дает рецепта получения корреляторов из конформных блоков (неизвестны константы C^{ab} из (1) в общем виде). Кроме того, при этом остаются завуалированными многие важные свойства конформных блоков (то, что они должны удовлетворять специальным дифференциальным [2] и алгебраическим [8, 9] уравнениям, следующим из внутренней симметрии модели).

В письме предложено действие, решающее эти проблемы. Оно позволяет находить полные корреляторы $SU(2)$-модели ВЗНВ, при этом конформные блоки, из которых

[1)] e-mail: saraikin@itp.ac.ru

они строятся, сразу удовлетворяют необходимым уравнениям. Это действие трех свободных полей, возмущенных некоторым специальным маргинальным оператором.

2. Рассмотрим алгебру $sl(2)$. Она задается следующими коммутационными соотношениями между образующими Шевалле e, f, h:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h. \tag{2}$$

Тогда уравнения Книжника–Замолодчикова [2], которым должны удовлетворять конформные блоки, примут вид

$$\nabla_{KZ}\mathcal{F}(\mathbf{z}) \equiv \kappa\frac{\partial}{\partial z_i}\mathcal{F}(\mathbf{z}) - \sum_{j\neq i}\frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j}\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0 \tag{3}$$

$(\Omega_{ij} \equiv 1/2h_ih_j + e_if_j + f_ie_j,\ \mathbf{z} \equiv (z_1, \dots, z_N),\ \kappa \equiv k+2, \quad k \in \mathbf{N}\ )$.
Это уравнения на функцию N переменных $\mathcal{F}(z_1, \dots, z_N)$ со значениями в тензорном произведении N представлений алгебры $sl(2)$. Индекс i у оператора h_i (e_i, f_i) означает, что он действует как h (e, f) на i-тую компоненту в тензорном произведении и как единичный оператор – на все остальные. Мы будем пользоваться представлением со старшим весом j:

$$h\,|j,0\rangle = -j\,|j,0\rangle\,, \quad f\,|j,0\rangle = 0, \quad e^m\,|j,0\rangle = |j,m\rangle\,, \quad e^{j+1}\,|j,0\rangle = 0.$$

Для удобства в дальнейшем обозначим через $\mathbf{v}$ “вакуумный вектор” тензорного произведения N представлений:

$$\mathbf{v} \equiv |j_1, 0\rangle \otimes \dots \otimes |j_N, 0\rangle\,.$$

Рассмотрим реализацию алгебры Каца–Муди $sl(2)_k$ при помощи свободных полей [10]:

$$J^+ = \beta, \quad H =: \beta\gamma : -\frac{iq}{\sqrt{2}}\partial\phi, \quad J^- =: \beta\gamma^2 : -i\sqrt{2}q\gamma\partial\phi - k\partial\gamma. \tag{4}$$

Здесь $q = \sqrt{\kappa}$, ϕ – скалярное поле со значениями в окружности, β и γ – бозонные 1- и 0-дифференциалы с операторными разложениями:

$$\phi(z)\phi(w) = -\log(z-w) + O(1), \quad \beta(z)\gamma(w) = \frac{1}{z-w} + O(1). \tag{5}$$

Голоморфным частям примарных полей $\Phi^{m\bar{m}}_{\Delta_j,\bar{\Delta}_j}(z,\bar{z})$ в такой формулировке соответствуют вершинные операторы $V_{j,m}(z)$, образующие представление $sl(2)_k$ со старшим весом j (см. [7, 11]):

$$V_{j,m}(z) = \gamma^m(z) : \exp\left(i\frac{j}{\sqrt{2}q}\phi(z)\right) : \tag{6}$$

Все операторы из этого представления имеют одинаковую конформную размерность

$$\Delta_j = \frac{j/2(j/2+1)}{k+2}. \tag{7}$$

Чтобы воспроизвести правильный центральный заряд теории, надо добавить в действие для поля ϕ член с кривизной, что при специальном выборе метрики эквивалентно вычислению корреляторов со вставкой так называемого вакуумного заряда [12]:

$$V_{vac}(R) = \gamma(R) \ : \exp\left(i\frac{\sqrt{2}}{q}\phi(R)\right) : .$$

Кроме того, в теории существует особый оператор с нулевой конформной размерностью:

$$\oint dtS(t) = \oint dt : \exp(-i\frac{\sqrt{2}}{q}\phi(t)) : \beta(t) \tag{8}$$

– так называемый экранирующий оператор (оператор Фейгина – Фукса [13]). Он коммутирует с алгеброй (4) и не меняет конформных свойств коррелятора.

3. Вершинные операторы (6), следуя [8], удобно объединить в один мультиплет:

$$\tilde{V}_j = \sum_{m=0}^{\infty} c_m V_{j,m} e^m \tag{9}$$

(члены с $m > j$ в этой сумме несущественны, поскольку в силу условия $e^{j+1}|j,0\rangle = 0$ они исчезнут при действии $\tilde{V}_j$ на $\mathbf{v}$). Теперь, вычисляя корреляторы операторов $\tilde{V}_{j_1}, \ldots, \tilde{V}_{j_N}$, мы получаем все возможные N-точечные конформные блоки – они даются коэффициентами при $e_1^{m_1} \ldots e_N^{m_N}$. Константы c_m в (9) однозначно определяются из хорошо известного операторного разложения [2], которое должны иметь примарные поля с токами:

$$J^a(z)\tilde{V}_j(w) = \frac{t^a}{z-w}\tilde{V}_j(w) + O(1) \tag{10}$$

(здесь $a = \{1,2,3\}$, $J^1 \equiv J^+$, $J^2 \equiv J^-$, $J^3 \equiv H$, $t^1 \equiv e$, $t^2 \equiv f$, $t^3 \equiv h$). Из (10) находим[2)]

$$c_m = \frac{1}{m!},$$

после чего ряд (9) суммируется в экспоненту – вершинный оператор "одевается":

$$\tilde{V}_j(z) \equiv : \exp\left(i\frac{j}{\sqrt{2}q}\phi(z)\right) : \ \exp\left(\gamma(z)e\right), \tag{11}$$

Конформные блоки – это голоморфные части корреляторов "одетых" вершинных операторов (11) со вставкой n экранирующих операторов[3)]:

$$\mathcal{F}_a(\mathbf{z}) = \oint_a dt_1 \ldots dt_n \left\langle S(t_1) \ldots S(t_n)\tilde{V}_{j_1}(z_1) \ldots \tilde{V}_{j_N}(z_N)\right\rangle \mathbf{v}, \tag{12}$$

где индекс a нумерует различные наборы контуров интегрирования. Число n в этой формуле диктуется законом сохранения заряда:

$$n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} j_i + 1 \tag{13}$$

[2)] проще всего это увидеть из операторного разложения с J^+.

[3)] Здесь и далее выражение $\langle \ldots \rangle$ означает голоморфную часть соответствующего коррелятора из теории свободных полей, в то время как $\langle \ldots \rangle_{WZNW}$ – полный коррелятор модели ВЗНВ.

(единица отвечает вкладу вакуумного заряда). Действительно, континуальный интеграл по полю ϕ[4] в (12) дает общий множитель

$$\prod_{p<q}(t_p - t_q)^{\frac{2}{\kappa}} \prod_{i<l}(z_i - z_l)^{\frac{j_i j_l}{2\kappa}} \prod_{p=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}(t_p - z_l)^{-\frac{j_l}{\kappa}}, \tag{14}$$

а интеграл по (β,γ)-полям равен

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{\Sigma m_i=n} \frac{1}{m_1!\dots m_N!} \langle \beta(t_1)\dots\beta(t_n)\gamma^{m_1}(z_1)\dots\gamma^{m_N}(z_N)\rangle\, e_1^{m_1}\dots e_N^{m_N}\ \mathbf{v} = \\ &= \textstyle\sum_{\Sigma m_i=n}\sum_{perm} \frac{e_{\sigma(1)}}{t_1 - z_{\sigma(1)}}\dots\frac{e_{\sigma(m)}}{t_m - z_{\sigma(m)}}\mathbf{v} = \prod_{p=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\frac{e_i}{t_p - z_i}\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{15}$$

где знак $\sum_{perm}$ означает суммирование по всем перестановкам чисел $\{\sigma(1),\dots,\sigma(N)\}$, таким, что среди них число i $(i = 1,\dots,N)$ встречается ровно m_i раз. Следуя [14], удобно ввести функцию

$$Y(\mathbf{z},t) = \prod_{l=1}^{N}(t - z_l)^{-\frac{j_l}{\kappa}} \sum_{i=1}^{N}\frac{e_i}{t - z_i}. \tag{16}$$

Тогда, собирая вместе (14) и (15), мы получим следующее выражение:

$$\mathcal{F}_a(\mathbf{z}) = \prod_{i<l}(z_i - z_l)^{\frac{j_i j_l}{2\kappa}} \oint_a dt_1\dots dt_n \prod_{p<q}(t_p - t_q)^{\frac{2}{\kappa}}\ Y(\mathbf{z},t_1)\dots Y(\mathbf{z},t_n)\ \mathbf{v}, \tag{17}$$

которое совпадает с известным решением Шехтмана – Варченко [14 – 16] уравнений Книжника – Замолодчикова.

Известно, что, вообще говоря, не все решения уравнений КЗ являются конформными блоками модели ВЗНВ, поскольку последние отвечают интегрируемым представлениям алгебры Каца – Муди и обязаны удовлетворять дополнительным алгебраическим уравнениям [8, 9], гарантирующим отщепление нуль-векторов. Фейгин, Шехтман и Варченко [18] доказали, что решение (17) удовлетворяет этим уравнениям[5].

4. Перейдем к построению корреляторов из конформных блоков. Ограничимся случаем примарных полей без спина, для которых $\Delta = \bar{\Delta}$. Построим для примарных полей аналоги мультиплетов (9):

$$\Phi_{\Delta_j}(z,\bar{z}) = \sum_{m,\bar{m}=0}^{j} c_{m\bar{m}}\Phi_{\Delta_j}^{m\bar{m}}(z,\bar{z})\ e_L^{m}\otimes e_R^{\bar{m}}. \tag{18}$$

---

[4] Напомним, что имеет место формула: $\left\langle \prod_{i=1}^{N} : \exp(i\alpha_i\phi(z_i)) : \right\rangle = \prod_{i<l}(z_i - z_l)^{\alpha_i\alpha_l}\delta_{\Sigma\alpha_i,0}$, где символ Кронекера возникает из-за интегрирования по нулевой моде. В дальнейшем условие $\Sigma\alpha_i = 0$ всегда предполагается выполненным и символ Кронекера опускается. Также для краткости мы не пишем явно вакумный заряд. Для корреляторов (β,γ)-полей справедлива теорема Вика; кроме того, в данной прескрипции все корреляторы, в которых число β-полей не равно числу γ-полей, равны нулю.

[5] Сделаем замечание, касающееся выбора контуров интегрирования в (17). При подстановке подынтегрального выражения (17) в алгебраические уравнения и уравнения КЗ получаются полные производные по переменным t_i от выражений типа (14) (точные формы). Поэтому контуры должны быть выбраны так, чтобы такие точные формы на них обращались в нуль. В конкретных вычислениях можно использовать, например, прескрипцию Фельдера [17] или Доценко – Фатеева [12].

Задав веса $\{j_1, \ldots, j_N\}$ или, что то же, конформные размерности $\{\Delta_{j_1}, \ldots, \Delta_{j_N}\}$, мы получаем по формуле (12) набор конформных блоков $\mathcal{F}_a(\mathbf{z})$, отличающихся друг от друга выбором контуров интегрирования. Константы C^{ab} в (1) должны определяться требованием однозначности при обносе одних точек в корреляторе вокруг других. По аналогии с представлением Доценко–Фатеева для минимальных моделей [12], естественно предложить в качестве искомого коррелятора следующее выражение:

$$\begin{aligned}&\left\langle \Phi_{\Delta_{j_1}}(z_1,\bar z_1)\ldots\Phi_{\Delta_{j_N}}(z_N,\bar z_N)\right\rangle_{WZNW} \sim \\ &\sim \int_\Sigma d^2t_1\ldots d^2t_n \left|\left\langle S(t_1)\ldots S(t_n)\tilde V_{j_1}(z_1)\ldots\tilde V_{j_N}(z_N)\right\rangle\right|^2 \mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\end{aligned} \tag{19}$$

(знак $\int_\Sigma$ означает интегрирование по всей поверхности). При этом требование однозначности, очевидно, выполняется. Замечательно, что тогда можно обеспечить появление экранирующих операторов, просто добавив к свободному действию

$$S_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2t\left(\frac{1}{2}\partial\phi(t,\bar t)\bar\partial\phi(t,\bar t) - \beta(t)\bar\partial\gamma(t) - \bar\beta(\bar t)\partial\bar\gamma(\bar t) + i\frac{\sqrt2}{q}\mathcal{R}\phi(t,\bar t)\right) \tag{20}$$

член с взаимодействием S_{int} следующего вида:

$$S_{int} = \alpha\int_\Sigma d^2t\ \beta(t)\bar\beta(\bar t)\ :\exp\left(-i\frac{\sqrt2}{q}\phi(t,\bar t)\right): \tag{21}$$

с некоторой постоянной α и введя “одетый” вершинный оператор[6]:

$$\tilde V_j(z,\bar z) \equiv :\exp\left(i\frac{j}{\sqrt2 q}\phi(z,\bar z)\right):\ \exp\left(\gamma(z)e_L + \bar\gamma(\bar z)e_R\right). \tag{22}$$

Тогда коррелятор ВЗНВ будет даваться следующим континуальным интегралом:

$$\begin{aligned}&\left\langle \Phi_{\Delta_{j_1}}(z_1,\bar z_1)\ldots\Phi_{\Delta_{j_N}}(z_N,\bar z_N)\right\rangle_{WZNW} = \\ &= \int\mathcal{D}[\phi,\beta,\gamma,\bar\beta,\bar\gamma]\ \exp(-S_0 - S_{int})\ \tilde V_{j_1}(z_1,\bar z_1)\ldots\tilde V_{j_N}(z_N,\bar z_N)\ \mathbf{v}\otimes\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{23}$$

Действительно, при разложении $\exp(-S_{int})$ в ряд мы будем получать корреляторы со вставками экранирующих операторов, причем из-за условия (13) остается только член n-го порядка, и мы приходим к выражению (19).

Интегралы по римановой сфере, стоящие в правой части, которые могут содержать расходимости, следует понимать в смысле аналитического продолжения по параметрам, используя формулы типа

$$\int d^2z|z|^{2a}|1-z|^{2b} = \pi\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)\Gamma(-1-a-b)}{\Gamma(-a)\Gamma(-b)\Gamma(2+a+b)}. \tag{24}$$

Следует отметить сходство формул (14), (15), (19) с выражениями (19), (20) из работы [19] для скалярного произведения квантовых состояний теории Черн-Саймонса – оно получается заменой:

$$(k+2) \to -(k+2).$$

[6] $\bar\beta,\bar\gamma$-поля соответствуют антиголоморфному сектору модели, а e_L и e_R действуют на левое и правое представления соответственно.

Итак, мы получили следующий рецепт построения конформных блоков и корреляторов $SU(2)$-модели ВЗНВ: *N-точечный конформный блок есть голоморфная часть коррелятора N "одетых" вершинных и n экранирующих операторов в теории свободных (ϕ, β, γ)-полей, причем число n диктуется условием сохранения заряда, а N-точечный коррелятор ВЗНВ есть коррелятор N "одетых" вершинных операторов в теории (ϕ, β, γ)-полей с взаимодействием вида* (21).

Описанная конструкция обобщается на другие группы, конформные блоки для которых хорошо известны [7]. Наиболее заманчивым представляется обобщение на поверхности старшего рода – как следствие этого мы должны получить решения уравнений Книжника – Замолодчикова – Бернара [20, 21], ранее известные только для теории на торе. Кроме того, несомненный интерес представляет изучение (ϕ, β, γ)-системы с действием $S_0 + S_{int}$. Следует также отметить возобновившийся в последнее время интерес к бозонизации модели ВЗНВ в связи с рассматриваемыми в теории струн вариантами компактификации с участием пространств AdS_3 и AdS_5 [22].

Автор признателен А.Ю.Морозову за стимулирующие дискуссии и внимание к работе, И.В.Полюбину, А.Д.Миронову и А.В.Маршакову за критические замечания, а также А.С.Лосеву за ценные обсуждения и поддержку на завершающем этапе работы.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 98-02-16575 и гранта Президента РФ 96-15-96939.

---

1. E.Witten, Comm. Math. Phys. **92**, 455 (1984).
2. V.Knizhnik and A.Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B247**, 83 (1984).
3. P.Goddard, A.Kent, and D.Olive, Phys. Lett. **152B**, 88 (1985).
4. В.Дринфельд, В.Соколов, *Современные проблемы математики*, ВИНИТИ СССР, 1984, с.24.
5. A.Belavin, A.Polyakov, and A.Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241**, 333 (1984).
6. Б.Фейгин, Е.Френкель, УМН **43**, 227 (1988); B.Feigin and E.Frenkel, Lett. Math. Phys. **19**, 307 (1990).
7. A.Gerasimov, A.Marshakov, A.Morozov et al., Int. J. Mod. Phys. **A5**, 2495 (1990).
8. A.Zamolodchikov and V.Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. **43**, 657 (1986); Yad. Fiz. **43**, 1031 (1986).
9. D.Gepner and E.Witten, Nucl. Phys. **B278**, 493 (1986).
10. M.Wakimoto, Comm. Math. Phys. **104**, 605 (1986).
11. V.Dotsenko, Nucl. Phys. **B338**, 747 (1990).
12. V.Dotsenko and V.Fateev, Nucl. Phys. **B240**, 312 (1984); V.Dotsenko and V.Fateev, Nucl. Phys. **B251**, 691 (1985).
13. B.Feigin and D.Fuks, Funct. Anal. Appl. **17**, 241 (1983).
14. P.Etingof, I.Frenkel, and A.Kirillov, *Lectures on representation thery and Knizhnik-Zamolodchikov equations.*
15. V.Schechtman and A.Varchenko, Lett. Math. Phys. **20**, 279 (1990); Invent. Math. **106**, 139 (1991).
16. H.Awata, Prog. Theor. Phys. Suppl. **110**, 303 (1992), hep-th/9202032.
17. G.Felder, preprint Zurich (1988); G.Felder and R.Silvotti, Phys. Lett. **B231**, 411 (1989).
18. B.Feigin, V.Schechtman, and A.Varchenko, Comm. Math. Phys. **163**, 173 (1994).
19. F.Falceto, K.Gawedzki, and A.Kupiainen, Phys. Lett. **B260**, 101 (1991).
20. D.Bernard, Nucl. Phys. **B303**, 77 (1988), D.Bernard, Nucl. Phys. **B309**, 145 (1988).
21. D.Ivanov, Int.J.Mod.Phys. **A10**, 2507 (1995), hep-th/9410091, D.Ivanov and A.Losev, ITEP-TH-79/97.
22. O.Andreev, hep-th/9909222; M.Banados and A.Ritz, hep-th/9906191; J. de Boer and S.Shatashvili, hep-th/9905032; D.Kutasov and N.Seiberg, hep-th/9903219; N.Berkovits, C.Vafa, and E.Witten, hep-th/9902098; J. de Boer, H.Ooguri, H.Robins, and J.Tannenhauser, hep-th/9812046; A.Giveon, D.Kutasov, and N.Seiberg, hep-th/9806194.