

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЛАЗЕРНОЙ ФОКУСИРОВКЕ АТОМНОГО ПУЧКА

В.В.Климов¹⁾, В.С.Летохов*

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
117294 Москва, Россия

*Институт спектроскопии РАН
142092 Троицк, Московская область, Россия

Поступила в редакцию 28 сентября 1999 г.

Найдено точное решение (функция Грина) параболического уравнения, описывающего движение нейтральных атомов в поле полой TEM_{01}^* -моды лазерного излучения. На основе этого решения найдены положения фокуса и ширины фокального пятна при различных конфигурациях лазерного атомного пучка.

PACS: 42.65.Jx

В настоящее время активно разрабатываются способы и методы управления когерентными и некогерентными атомными пучками. Основными элементами управления являются атомные линзы и атомные зеркала [1–3]. Применительно к достаточно быстрым атомным пучкам атомные линзы и атомные зеркала на основе оптической градиентной силы хорошо исследованы как теоретически, так и экспериментально [4–8]. При этом, в силу сложности потенциала градиентной силы, характеристики атомных линз находились либо асимптотически (слабое влияние поля) [5,6], либо в рамках довольно грубых приближений (лучевая оптика) [7], либо численно при фиксированных значениях параметров [6,8]. Отсутствие точных аналитических решений затрудняет анализ свойств атомных линз, особенно в области сильной фокусировки. В настоящей работе рассмотрена атомная линза на TEM_{01}^* -моды для фокусировки атомных пучков с произвольными скоростями и показано, что уравнение параболического приближения имеет точное аналитическое решение. Геометрия задачи показана на рис.1.

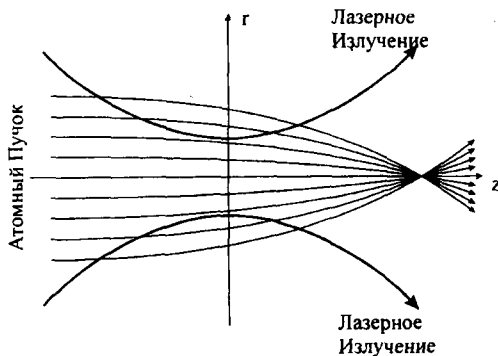


Рис.1. Геометрия задачи о фокусировке

¹⁾ e-mail: klimov@rim.phys.msu.su

Не зависящая от времени волновая функция атома, проходящего через атомную линзу, описывается уравнением Шредингера

$$\frac{\hbar^2 k_{dB}^2}{2m} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{opt}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

где V_{opt} – фокусирующий потенциал градиентной силы, $k_{dB} = 2\pi/\lambda_{dB}$ – волновой вектор атома, m – масса атома. В качестве фокусирующего потенциала мы будем использовать сфокусированную TEM_{01}^* -моду [4, 9]

$$V_{opt}(r, z) = \frac{\hbar\Omega}{2} \ln(1 + p(r, z)), \quad p(r, z) = \frac{I(r, z)}{I_s} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 4\Omega^2},$$

$$I(r, z) = 4I_0 \frac{2w_0^2 r^2}{w^4(z)} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right). \quad (2)$$

В (2) $\Omega = \omega - \omega_0$ – расстройки частоты излучения ω относительно частоты атомного перехода ω_0 , γ и I_s – ширина линии и интенсивность насыщения атомного перехода, w_0 – радиус перетяжки лазерного луча в плоскости $z = 0$, $w^2(z) = w_0^2(1 + z^2/z_R^2)$ – размер перетяжки в плоскости z , $z_R = (\pi/\lambda)w_0^2$ – рэлеевская длина, λ – длина волны оптического излучения. На рис.2а показан потенциал градиентной силы (2).

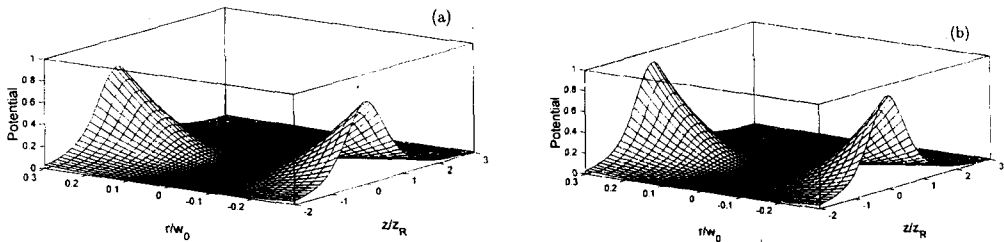


Рис.2. Форма фокусирующего потенциала (а – точное, б – параксиальное приближение)

Уравнение (1) с потенциалом (2) сложно решить аналитически. Поэтому требуются дальнейшие упрощения (1). Первым упрощением является параболическое приближение, основанное на том, что длина волны де-Бройля λ_{dB} атома является малой по сравнению с характерными продольными градиентами. При этом решение ищется в виде [10]

$$\Psi = e^{ik_{dB}z} \psi, \quad (3)$$

где ψ – медленно меняющаяся вдоль направления распространения пучка функция. Пренебрегая вторыми производными, вдоль оси пучка мы получаем обычное параболическое уравнение [10]:

$$ik_{dB} \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial z} \psi(r, z) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^\perp + V_{opt}(r, z) \right] \psi(r, z), \quad (4)$$

где $\Delta^\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Уравнение (4) также не удается решить аналитически. Однако для достаточно узких пучков вместо потенциала (2) можно использовать лишь первый член в его

разложении по поперечным координатам x, y :

$$V_{opt}(r, t) \approx \hbar\gamma \frac{C(r/w_0)^2}{2(1 + (z/z_R)^2)^2}, \quad C = \frac{I_0}{I_s} \frac{8(\Omega/\gamma)}{1 + 4(\Omega/\gamma)^2}. \quad (5)$$

Потенциал (5) показан на рис.2b.

Если использовать безразмерные параметры $\tau = z/z_R$, $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/w_0$, то уравнение (4) с потенциалом (5) можно записать в виде

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\bar{\mathbf{r}}, \tau) = p_1 \left[-\frac{1}{4} \bar{\Delta}^2 + p_2 \frac{C}{2} \frac{\bar{r}^2}{(1 + \tau^2)^2} \right] \psi(\bar{\mathbf{r}}, \tau), \quad (6)$$

где $p_1 = \lambda_{dB}/\lambda$; $p_2 = \gamma m \omega_0^2 / 2\hbar$.

Уравнение (6) имеет аналитическое решение. Для нахождения этого решения заметим, что (6) является временным уравнением Шредингера, в котором роль времени играет координата τ , а потенциал имеет гармонический, зависящий от времени, характер. В этом случае с помощью интеграла по траекториям удастся показать [11], что выражение для функции Грина, то есть решения неоднородного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} G(\bar{\mathbf{r}}, \tau; \bar{\mathbf{r}}_1, 0) - p_1 \left[-\frac{1}{4} \bar{\Delta}^2 + p_2 \frac{C}{2} \frac{\bar{r}^2}{(1 + \tau^2)^2} \right] G(\bar{\mathbf{r}}, \tau) = i\delta(\tau)\delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1) \quad (7)$$

Можно представить в виде

$$G(\bar{\mathbf{r}}_2, \tau_2; \bar{\mathbf{r}}_1, \tau_1) = F(\tau_2, \tau_1) e^{iS_{cl}[\tau_2, \tau_1]}, \quad (8)$$

где S_{cl} – действие вдоль классической траектории, соединяющей точки (\mathbf{r}_1, τ_1) и (\mathbf{r}_2, τ_2) :

$$S_{cl}[\tau_2, \tau_1] = \frac{2}{p_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L[\bar{\mathbf{r}}(\tau)],$$

$$L[\bar{\mathbf{r}}(\tau)] = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\mathbf{r}}(\tau)}{d\tau} \right)^2 - \frac{C p_1^2 p_2}{4} \frac{\bar{r}(\tau)^2}{(1 + \tau^2)^2} \right], \quad (9)$$

а фактор $F(\tau_2, \tau_1)$ не зависит от поперечных координат.

Для нахождения S_{cl} необходимо определить классические траектории, уравнения которых имеют вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(\tau)}{d\tau^2} + \frac{C p_1^2 p_2}{2} \frac{\mathbf{r}(\tau)}{(1 + \tau^2)^2} = 0. \quad (10)$$

Заметим, что уравнение лучей (10) хорошо известно в теории магнитных линз для заряженных частиц [12, 13]. Аналитическое решение уравнения (10) находится с помощью подстановки $\tau = \text{ctg}(\alpha)$ [12, 13] и имеет вид

$$\mathbf{r}(z) = \frac{\mathbf{r}_1 \sin \alpha_1 \sin A(\alpha_2 - \alpha) + \mathbf{r}_2 \sin \alpha_2 \sin A(\alpha - \alpha_1)}{\sin \alpha \sin A(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (11)$$

где $A = \sqrt{1 + C p_1^2 p_2 / 2}$, $\alpha_{1,2} = \text{ctg} \tau_{1,2}$. Подставляя (11) в (9), можно найти классическое действие S_{cl} :

$$S_{cl}[\tau_2, \tau_1] = \frac{1}{p_1} \left[\begin{aligned} &\bar{r}_2^2 \sin^2 \alpha_2 (-A \text{ctg} A(\alpha_2 - \alpha_1) + \text{ctg} \alpha_2) \\ &- \bar{r}_1^2 \sin^2 \alpha_1 (A \text{ctg} A(\alpha_2 - \alpha_1) + \text{ctg} \alpha_1) \\ &+ 2\bar{r}_1 \bar{r}_2 A \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin A(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned} \right], \quad (12)$$

справедливое для любой размерности пространства поперечных координат.

Для определения фактора $F(\tau_2, \tau_1)$ воспользуемся условием

$$G(\bar{\mathbf{r}}_2, \tau_2; \bar{\mathbf{r}}_1, \tau_1) = \int d\bar{\mathbf{r}}_3 G(\bar{\mathbf{r}}_2, \tau_2; \bar{\mathbf{r}}_3, \tau_3) G(\bar{\mathbf{r}}_3, \tau_3; \bar{\mathbf{r}}_1, \tau_1). \quad (13)$$

Подставляя в (13) (8), (12), приходим к функциональному уравнению:

$$F(\tau_2, \tau_1) = F(\tau_2, \tau_3) F(\tau_3, \tau_1) \frac{\pi p_1 \sin A(\alpha_3 - \alpha_1) \sin A(\alpha_2 - \alpha_3)}{iA \sin^2 \alpha_3 \sin A(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (14)$$

которое имеет решение

$$F(z_2, z_1) = \frac{iA \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\pi p_1 \sin A(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (15)$$

В результате окончательное выражение для функции Грина параболического уравнения (7) принимает вид

$$G(\bar{\mathbf{r}}_2, \tau_2; \bar{\mathbf{r}}_1, \tau_1) = \frac{iA \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\pi p_1 \sin A(\alpha_2 - \alpha_1)} \times \exp \left[\frac{i}{p_1} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{r}}_2^2 \sin^2 \alpha_2 (-\text{Actg} A(\alpha_2 - \alpha_1) + \text{ctg} \alpha_2) \\ -\bar{\mathbf{r}}_1^2 \sin^2 \alpha_1 (\text{Actg} A(\alpha_2 - \alpha_1) + \text{ctg} \alpha_1) \\ + 2\bar{\mathbf{r}}_1 \bar{\mathbf{r}}_2 A \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin A(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{pmatrix} \right], \quad (16)$$

где $\alpha_{1,2} = \text{ctg} \tau_{1,2}$ и $A = \sqrt{1 + Cp_1^2 p_2^2 / 2}$. Выражение (16) для функции Грина является основным результатом настоящей работы и может служить основой для нахождения решений целого ряда задач. Так, если при $z = z_1$ задана волновая функция $\varphi_0(\bar{\mathbf{r}})$, то с помощью формулы

$$\psi(\bar{\mathbf{r}}_2, \tau) = \int d^2 \bar{\mathbf{r}}_1 G(\bar{\mathbf{r}}_2, \tau; \bar{\mathbf{r}}_1, \tau_1) \varphi_0(\bar{\mathbf{r}}_1) \quad (17)$$

можно найти выражение для распределения атомной плотности вероятности в любой точке пространства. При этом в силу гауссовой зависимости функции Грина от поперечных координат интеграл в (17) может быть вычислен аналитически для целого класса пучков. В частности для практики интерес представляет выбор $\varphi_0(\mathbf{r})$ в гауссовском осесимметричном виде:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \exp(-\bar{\mathbf{r}}^2 / \bar{\sigma}_0^2). \quad (18)$$

Здесь $\bar{\sigma}_0^2$ описывает начальную ширину пучка. Подставляя (18) в (17) и выполняя интегрирование, для волновой функции в любой точке пространства получим выражение

$$\psi(\bar{\mathbf{r}}_2, \tau_2) = \frac{iA \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin A(\alpha_2 - \alpha_1) (p_1 / \bar{\sigma}_0^2 + iD_1)} e^{-\bar{\mathbf{r}}_2^2 / \bar{\sigma}^2},$$

$$\bar{\sigma}^2 = p_1 \frac{p_1 / \bar{\sigma}_0^2 + iD_1}{D_2 - ip_1 / \bar{\sigma}_0^2 D_3},$$

$$D_1 = \sin^2(\alpha_1) [\text{Actg}(A(\alpha_2 - \alpha_1)) + \text{ctg} \alpha_1], \quad (19)$$

$$D_2 = \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) \begin{bmatrix} A^2 \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ -A \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{ctg}(A(\alpha_2 - \alpha_1)) \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \sin^2(\alpha_2)[-A \operatorname{ctg}(A(\alpha_2 - \alpha_1)) + \operatorname{ctg}\alpha_2],$$

которое значительно упрощается на оси системы ($\bar{r}_2 = 0$)

$$\psi(\bar{r}_2 = 0, \tau_2) = \frac{iA}{(p_1/\bar{\sigma}_0^2 + i \sin^2 \alpha_1 (\operatorname{Actg} A(\alpha_2 - \alpha_1) + \operatorname{ctg}\alpha_1))} \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin A(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (20)$$

Максимумы $|\psi(\bar{r}_2 = 0, \tau_2)|^2$ определяют положение фокальных точек $z_c = z_R \tau_c = z_R \operatorname{ctg}\alpha_c$, которые подчиняются уравнению

$$D_1 = \sin^2(\alpha_1)[\operatorname{Actg}(A(\alpha_2 - \alpha_1)) + \operatorname{ctg}\alpha_1] = 0. \quad (21)$$

Минимальная ширина пучка в фокальной точке $\bar{\sigma}_c^2 = \bar{\sigma}^2(\alpha_c)$ легко находится из (19):

$$\bar{\sigma}_c^2 = \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2} \left(\frac{\lambda_{dB}}{\lambda} \right)^2 \frac{1 + \tau_c^2}{A^2 \sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1}. \quad (22)$$

Заметим, что, вообще говоря, в рамках параболического приближения (19), (20) (в отличие от геометрической оптики) волновая функция не может иметь сингулярностей вне источников.

В случае источника, расположенного при $z = -\infty$ ($\alpha_1 = \pi$), положения фокальных точек и ширины пучка в них определяются выражениями

$$\tau_c = -\operatorname{ctg}(\pi n/A), \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_c^2 = \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2} \left(\frac{\lambda_{dB}}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\sin^2(\pi n/A)}, \quad (24)$$

где $n = 1$ при $1 < A < 2$, $n = 1, 2$ при $1 < A < 3$ и так далее. Таким образом, в зависимости от величины фокусирующего потенциала в системе может быть несколько фокусов. Положения фокусов (21), (23) совпадают, естественно, с положениями фокусов, полученных в приближении геометрической оптики [7, 12, 13].

На рис.3 показана зависимость ширины пучка $\bar{\sigma}$ от продольного расстояния z при параметрах, соответствующих [7]. Из этого рисунка видно, что положение фокуса и минимальная ширина пучка, найденные в [7] в рамках численного подхода, достаточно хорошо совпадают с точным решением. Однако в целом поведение ширины пучка [7] вдоль оси существенно отклоняется от точного решения (19), (20).

Еще более сильные отклонения будут в случае сильной фокусировки, то есть малых скоростей пучка. На рис.4 показано трехмерное распределение плотности вероятности при тех же параметрах, что и на рис.3, за исключением начальной скорости пучка, которая выбрана равной 100 м/с.

Таким образом, в настоящей работе найдено аналитическое решение нестационарного уравнения Шредингера с потенциалом

$$U \propto r^2/(1+t^2)^2 \quad (25)$$

для любой размерности пространства. Полученное решение может оказаться полезным как для анализа распространения атомных пучков в поле TEM_{01}^* -моды лазерного излучения, так и для распространения света в неоднородной среде с показателем преломления

$$n^2 \propto r^2/(1+z^2)^2. \quad (26)$$

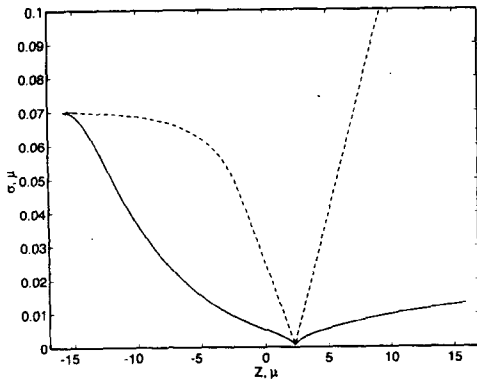


Рис.3. Зависимость ширины пучка σ атомов Na от продольного расстояния ($\lambda = 0.59$ мкм, $\gamma/2\pi = 10$ МГц, $I_s = 10$ мВт/см², $I_0 = 10^8/2\pi$ Вт/см², $V_z = 500$ м/с, $\Omega/\gamma = \sqrt{I_0/I_s}$). Штриховой линией показан результат численных расчетов [7]

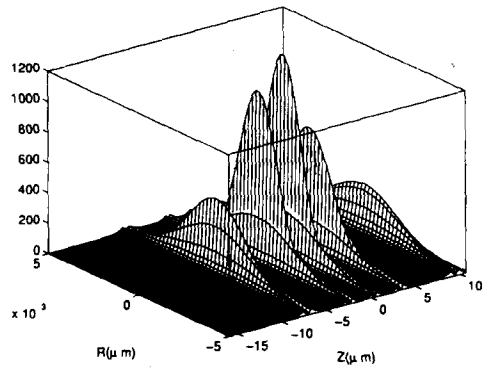


Рис.4. Пространственное распределение плотности вероятности $|\psi|^2$ при тех же параметрах, что и на рис.3, кроме $V_z = 100$ м/с

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку настоящей работы.

1. V.I.Balykin and V.S.Letokhov, *Atom Optics with Laser Light*, Harwood Academic Publishers, 1995.
2. C.S.Adams, M.Sigel, and J.Mlynek, *Atom Optics. - Physics Reports* **240**, 143 (1994).
3. J.P.Dowling and J.Gea-Banacloche, *Adv. in atomic, molecular and Optical Physics* **37**, 1 (1996).
4. В.И.Балыкин, В.С.Летохов, *ЖЭТФ* **94**, 140 (1988).
5. В.И.Балыкин, В.С.Летохов, *УФН* **160**, 141 (1990).
6. G.M.Gallatin and P.L.Gould, *J. Opt. Soc. Amer.* **B8**, 502 (1991).
7. J.J.McClelland and M.R.Sheifein, *J. Opt. Soc. Amer.* **B8**, 1974 (1991).
8. V.V.Klimov and V.S.Letokhov, *J. Mod. Optics.* **42**, 1485 (1995).
9. W.W.Rigrod, *Appl. Phys. Lett.* **2**, 51 (1963).
10. О.В.Руденко, А.П.Сухоруков, *Теория волн*, М.: Наука, 1990.
11. Р.Фейнман, А.Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, М.: Мир, 1968.
12. М.Силадьи, *Электронная и ионная оптика*, М.: Мир, 1990.
13. В.Глазер, *Основы электронной оптики*, М.: ГИТТЛ, 1957.