

КВАРКОВЫЙ И ГЛЮОННЫЙ КОНДЕНСАТЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н.О.Агасян^{1),2)}, И.А.Шушпанов¹⁾

Институт теоретической и экспериментальной физики
117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 октября 1999 г.

В рамках киральной теории возмущений получено двухпетлевое выражение для плотности энергии вакуума в постоянном магнитном поле. Найдена зависимость кваркового и глюонного конденсатов от напряженности поля H .

PACS: 11.15.Tk

1. Исследование зависимости кваркового конденсата от магнитного поля H в модели Намбу – Йона – Лазиньо было проделано в [1]. Для квантовой хронодинамики (КХД) однопетлевой результат был получен в [2]. В обоих случаях был обнаружен рост конденсата при увеличении H , что показывает неприменимость наивной аналогии с теорией сверхпроводимости, где конденсат куперовских пар разрушается магнитным полем.

В предлагаемой работе в области малых (по сравнению с характерным адронным масштабом) величин eH в рамках киральной теории возмущений (КТВ) получено двухпетлевое выражение для плотности энергии вакуума и найдена зависимость кваркового и глюонного конденсатов от напряженности поля. Заметим, что хотя глюоны и не несут электрического заряда, однако порождаемые ими виртуальные кварки, взаимодействуя с магнитным полем, приводят к изменению глюонного конденсата.

2. В евклидовой формулировке статистическая сумма КХД при наличии внешнего абелевого поля A_μ может быть записана в виде

$$Z = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^2 \right\} \int [DB_\mu^a][D\bar{q}_f][Dq_f] \exp \left\{ - \int d^4x L_{QCD} \right\}, \quad (1)$$

где лагранжиан КХД в фоновом поле имеет вид

$$L_{QCD} = \frac{1}{4g_0^2} (G_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_f \bar{q}_f \left[\gamma_\mu (\partial_\mu - iQ_f e A_\mu - i\frac{\lambda^a}{2} B_\mu^a) + m_f \right] q_f, \quad (2)$$

Q_f – зарядовая матрица кварков с ароматом $f = (u, d)$, и здесь мы для простоты явно не выписываем “духовые” и фиксирующие калибровку члены.

Плотность энергии системы определяется выражением $V_4 \epsilon_v(H, m_f) = - \ln Z$. В постоянном магнитном поле H кварковый конденсат в киральном пределе ($m_f \rightarrow 0$) записывается в виде

$$\langle \bar{q}_f q_f \rangle (H) = \left. \frac{\partial \epsilon_v(H, m_f)}{\partial m_f} \right|_{m_f=0}. \quad (3)$$

¹⁾ e-mail: agasyan@heron.itep.ru; shushpan@heron.itep.ru

²⁾ Agasian N.O.

Из (1) следует, что глюонный конденсат $\langle G^2 \rangle \equiv \langle (G_{\mu\nu}^a)^2 \rangle$ определяется следующим соотношением:

$$\langle G^2 \rangle = 4 \left. \frac{\partial \epsilon_v(H, m_f)}{\partial (1/g_0^2)} \right|_{m_f=0} \quad (4)$$

Явление размерной трансмутации приводит к появлению непертурбативного размерного параметра

$$\Lambda = M \exp \left\{ \int_{\alpha_s(M)}^{\infty} \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)} \right\}, \quad (5)$$

где M – масса ультрафиолетового обрезания, $\alpha_s = g_0^2/4\pi$ и $\beta(\alpha_s) = d\alpha_s(M)/d \ln M$ есть функция Гелл-Манна–Лоу. Система, описываемая статистической суммой (1), в киральном пределе ($m_f = 0$) содержит два размерных параметра M и H . Так как плотность энергии вакуума – величина наблюдаемая, то она обладает свойством ренорм-инвариантности и ее аномальная размерность равна нулю. Поэтому ϵ_v имеет только нормальную (каноническую) размерность, равную 4. Используя ренорм-инвариантность Λ , можно записать

$$\epsilon_v = \Lambda^4 f(H/\Lambda^2), \quad (6)$$

где f – неизвестная функция. Из уравнений (5) и (6) несложно получить

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial (1/g_0^2)} = \frac{8\pi\alpha_s^2}{\beta(\alpha_s)} \left(2 - H \frac{\partial}{\partial H} \right) \epsilon_v. \quad (7)$$

Учитывая (4), находим для глюонного конденсата

$$\langle G^2 \rangle(H) = \frac{32\pi\alpha_s^2}{\beta(\alpha_s)} \left(2 - H \frac{\partial}{\partial H} \right) \epsilon_v. \quad (8)$$

В отсутствие внешнего поля получим хорошо известное выражение для непертурбативной плотности энергии вакуума в киральном пределе, которое в однопетлевом приближении ($\beta = -b_0\alpha_s^2/2\pi$, $b_0 = (11N_c - 2N_f)/3$) имеет вид

$$\epsilon_v = -\frac{b_0}{128\pi^2} \langle G^2 \rangle. \quad (9)$$

3. Полученные формулы позволяют находить значения конденсатов в киральном пределе как функции H , зная плотность вакуумной энергии. Для вычисления ϵ_v необходимо рассмотреть вакуумные петли во внешнем магнитном поле. В области слабых полей $eH \ll \mu_{hadr}^2 \sim (4\pi F_\pi)^2$ характерные импульсы в петлях малы и теория адекватно описывается эффективным низкоэнергетическим киральным лагранжианом L_{eff} [3], который представляется в виде разложения в ряд по импульсам (производным) и массам ³⁾:

$$L_{eff} = L^{(2)} + L^{(4)} + L^{(6)} + \dots \quad (10)$$

Лидирующий член в (10) подобен лагранжиану нелинейной σ -модели во внешнем векторном поле V_μ :

$$L^{(2)} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr}(\nabla_\mu U^\dagger \nabla_\mu U) + \Sigma \text{ReTr}(\mathcal{M}U^\dagger), \quad (11)$$

³⁾ Заметим, что переход к киральному пределу означает, что $eH \gg M_\pi^2$.

$$\nabla_\mu U = \partial_\mu U - i[U, V_\mu].$$

Здесь U – унитарная $SU(2)$ матрица, $F_\pi = 93$ МэВ есть величина пионной константы распада, а параметр Σ имеет смысл кваркового конденсата $\Sigma = |\langle \bar{u}u \rangle| = |\langle \bar{d}d \rangle|$. Внешнее абелево магнитное поле H , направленное вдоль оси z , соответствует $V_\mu(x) = e(\tau^3/2)A_\mu(x)$, где вектор-потенциал A_μ выбирается в виде $A_1(x) = -Hx_2$. Разница масс u - и d -кварков входит в эффективный киральный лагранжиан только квадратично. Далее, так как при получении выражения для кваркового конденсата в киральном пределе используется только первая производная по массе одного из кварков, мы можем пренебречь разницей масс u - и d -кварков и считать массовую матрицу диагональной $M = m\hat{I}$.

В первом приближении лагранжиан (11) совпадает с лагранжианом скалярной электродинамики. Однопетлевое выражение для зависимости вакуумной энергии от магнитного поля в этой теории было найдено Швингером [4]:

$$\epsilon_v^{(1)}(H) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-M_s^2 s} \left[\frac{eHs}{\sinh eHs} - 1 \right]. \quad (12)$$

Используя формулы (3), (8) и соотношение Гелл-Манна – Оакса – Реннера (ГМОР) $2m\Sigma = F_\pi^2 M_\pi^2$, находим выражения для конденсатов в магнитном поле:

$$\Sigma(H) = \Sigma \left[1 + \frac{eH \ln 2}{(4\pi F_\pi)^2} \right], \quad (13)$$

$$\langle G^2 \rangle(H) = \langle G^2 \rangle + \frac{\alpha_s^2}{3\pi\beta(\alpha_s)} (eH)^2. \quad (14)$$

В киральной теории возмущений во внешнем поле разложение ведется в ряд по параметру $eH/(4\pi F_\pi)^2$. Для нахождения ϵ_v в следующем порядке необходимо учесть двухпетлевые диаграммы с вершинами из $L^{(2)}$, однопетлевые диаграммы с вершиной из $L^{(4)}$ и древесный вклад от $L^{(6)}$. Фейнмановские диаграммы для $\epsilon_v^{(2)}$ приведены на рисунке.

Для вычисления двухпетлевых диаграмм (а), (б), (с) нам понадобится разложение кирального лагранжиана $L^{(2)}$ до 4-пионных вершин. Матрица U может быть параметризована различным образом. Мы используем параметризацию Вайнберга

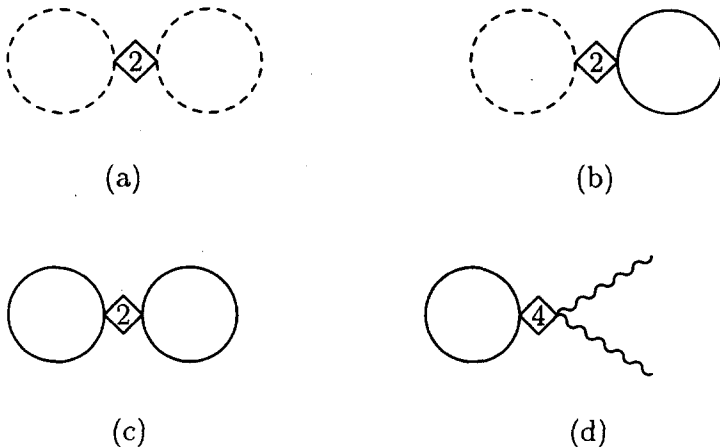
$$U = \sigma + \frac{i\pi^a \tau^a}{F_\pi}, \quad \sigma^2 + \frac{\pi^2}{F_\pi^2} = 1. \quad (15)$$

Тогда разложение $L^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} L^{(2)} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi^0)^2 - \frac{M_\pi^2 (\pi^0)^2}{2} + (\partial_\mu \pi^+ + ieA_\mu \pi^+) (\partial_\mu \pi^- - ieA_\mu \pi^-) - M_\pi^2 \pi^+ \pi^- + \\ & + \frac{1}{2F_\pi^2} [\pi^0 \partial_\mu \pi^0 + \partial_\mu (\pi^+ \pi^-)]^2 - \frac{M_\pi^2}{8F_\pi^2} [2\pi^+ \pi^- + (\pi^0)^2]^2, \end{aligned} \quad (16)$$

где введены поля заряженных π^\pm - и нейтрального π^0 -мезонов:

$$\pi^0 = \pi^3, \quad \pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^1 \pm i\pi^2). \quad (17)$$



Диаграммы для вычисления плотности энергии вакуума во внешнем магнитном поле во втором порядке КТВ. Сплошная линия соответствует заряженному пиону, штриховая – нейтральному пиону, волнистая – внешнему электромагнитному полю

Пропагатор заряженных скалярных частиц в магнитном поле в евклидовой метрике имеет вид

$$D^H(x, y) = \Phi(x, y) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} D^H(k), \quad (18)$$

где $\Phi(x, y) = \exp\{ie \int_y^x A_\mu(z) dz_\mu\}$ – абелева фаза и интеграл берется вдоль прямой линии, соединяющей точки x и y . Функция $D^H(k)$ записывается в форме [5]

$$D^H(k) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cosh(eHs)} \exp \left\{ -s \left(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \frac{\tanh eHs}{eHs} + M_\pi^2 \right) \right\} \quad (19)$$

и $k_{\parallel}^2 = k_3^2 + k_4^2$, $k_{\perp}^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Поправка к плотности вакуумной энергии, соответствующая диаграмме (а), записывается в виде

$$\epsilon_v^{(2)}[\text{диагр. (а)}] = -\frac{M_\pi^2}{8F_\pi^2} D^2(0), \quad (20)$$

где $D(0)$ – свободный пропагатор скалярной массивной частицы при совпадающих точках. В размерной регуляризации он равен

$$D(0) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + M^2} = 2M^2 \left(\lambda + \frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right), \quad (21)$$

где μ – массовый параметр размерной регуляризации и в (21) выделено сингулярное слагаемое

$$\lambda = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2} \left[\frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} (\ln 4\pi - \gamma_E + 1) \right]. \quad (22)$$

Выражение (20) не приводит к изменению конденсатов и просто сводится к перенормировке ϵ_v в отсутствие поля.

Диаграмма (b) дает следующий вклад в ϵ_v :

$$\epsilon_v^{(2)}[\text{диагр. (b)}] = \frac{M_\pi^2}{2F_\pi^2} D(0) D^H(0), \quad (23)$$

где $D^H(0) = D^H(x, x)$. В соответствии с ГМОР, выражение (23) пропорционально квадрату массы кварка и в киральном пределе не дает вклада в конденсаты.

Проводя вычисления для диаграммы на диаграмме (с), получим

$$\epsilon_v^{(2)}[\text{диагр. (с)}] = \frac{1}{F_\pi^2} D^H(0) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k^2 + M_\pi^2) D^H(k). \quad (24)$$

Это выражение содержит четвертичную расходимость. Однако в размерной регуляризации $\int d^d k = 0$, и эта расходимость может быть отброшена ⁴⁾. Вычитая единицу из подынтегрального выражения в (24) и переходя к пределу $d \rightarrow 4$, находим, что $\epsilon_v^{(2)}[\text{диагр. (с)}] = 0$. Таким образом, двухпетлевые диаграммы не дают вклада, линейного по массе кварка, в вакуумную энергию. Кроме рассмотренных выше, в данном порядке разложения по $eH/(4\pi F_\pi)^2$ есть еще однопетлевые диаграммы с вершинами из $L^{(4)}$. Так как внешнее поле несет нулевой импульс, из всего $L^{(4)}$ для нас существенны только два слагаемых:

$$L^{(4)} = -\frac{2l_5}{F_\pi^2} (eF_{\mu\nu})^2 \pi^+ \pi^- - \frac{2il_6}{F_\pi^2} eF_{\mu\nu} [\partial_\mu \pi^- \partial_\nu \pi^+ + ieA_\mu \partial_\nu (\pi^+ \pi^-)], \quad (25)$$

где константы l_5 и l_6 определены в [3]. Соответствующие диаграммы приведены на диаграмме (d). Прямое вычисление приводит к результату

$$\epsilon_v^{(2)}[\text{диагр. (d)}] = \frac{2(eH)^2}{F_\pi^2} (2l_5 - l_6) D^H(0). \quad (26)$$

Хотя константы l_5 и l_6 бесконечны, однако их комбинация, входящая в (26), оказывается конечной [3]:

$$2l_5 - l_6 = \frac{1}{96\pi^2} (\bar{l}_6 - \bar{l}_5), \quad (27)$$

где $\bar{l}_6 - \bar{l}_5 \approx 2.7$.

Полный вид $L^{(6)}$ довольно сложен [7], однако для наших целей существенно всего одно слагаемое, которое, в удобной для нас форме, может быть записано в виде

$$L^{(6)} = \frac{80d}{9F_\pi^4} (eF_{\mu\nu})^2 \Sigma \text{ReTr}\{\mathcal{M}U^+\}. \quad (28)$$

Здесь $d = d^r(\mu) + \text{const} \cdot \lambda$ и λ содержит полюс $\mu^{(d-4)}/(d-4)$. По построению киральной теории возмущений расходящаяся часть в (28) сокращается с полюсными слагаемыми, возникающими от однопетлевых диаграмм с вершинами из $L^{(4)}$. Величина d^r может быть определена с использованием результатов, полученных в работе [8], где рассматривался процесс $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$. Используя обозначения [8], выражение для d^r приводится к виду

$$d^r = \frac{9}{320} (\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 + 4\bar{b}), \quad (29)$$

где \bar{a}_1 , \bar{a}_2 и \bar{b} имеют смысл коэффициентов перед различными тензорными структурами в амплитуде $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$. Численные значения \bar{a}_1 , \bar{a}_2 и \bar{b} были определены

⁴⁾ Для других регуляризаций 4-ная расходимость исчезает только при учете нетривиальной меры интегрирования. Примеры явных двухпетлевых вычислений можно найти в [6].

с помощью явного насыщения амплитуды процесса скалярными, векторными и тензорными резонансами [8]. Вычисление показывает, что в величину d^r дает вклад только обмен скалярными мезонами и

$$d^r(\mu \sim 0.75 \text{ ГэВ}) \approx \pm 4 \cdot 10^{-6}. \quad (30)$$

Неопределенность в знаке d^r связана с тем, что константа связи скалярного мезона с фотонами или пионами входит в экспериментально измеряемые ширины распадов квадратично, в то время как в эффективный лагранжиан они входят линейно и, соответственно, знак d^r не определяется из эксперимента.

Теперь перейдем к получению конечного результата. Учитывая, что для получения кваркового конденсата нам необходимо удержать члены только первого порядка по M_π^2 , получим

$$D^H(0) = [D^H(0) - D(0)] + D(0) \approx -\frac{eH \ln 2}{16\pi^2} + \frac{M_\pi^2}{16\pi^2} \left[\ln \frac{eH}{M_\pi^2} + C \right] + 2M_\pi^2 \left[\lambda + \frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{M_\pi^2}{\mu^2} \right], \quad (31)$$

где C – медленно меняющаяся функция eH/M_π^2 и $C(0) \approx -0.2$. Собирая вместе полученные выше результаты, получим окончательный ответ для плотности вакуумной энергии:

$$\epsilon_v(H) = \epsilon_v(0) + \epsilon_v^{(1)}(H) + \frac{1}{48\pi^2} \frac{(eH)^2}{(4\pi F_\pi)^2} (\bar{l}_6 - \bar{l}_5) \left\{ -eH \ln 2 + M_\pi^2 \left[\ln \frac{eH}{\mu^2} + C \right] \right\} - \frac{160d^r(\mu)}{9F_\pi^2} (eH)^2 M_\pi^2. \quad (32)$$

Используя формулы (3), (8) и соотношение ГМОР, находим зависимость кваркового конденсата от H :

$$\Sigma(H) = \Sigma \left\{ 1 + \frac{eH}{(4\pi F_\pi)^2} \ln 2 - \frac{1}{3} \frac{(eH)^2}{(4\pi F_\pi)^4} \left[(\bar{l}_6 - \bar{l}_5) \left(\ln \frac{eH}{\mu^2} + C \right) - \frac{160(4\pi)^4}{3} d^r(\mu) \right] \right\}. \quad (33)$$

Для глюонного конденсата имеем следующее выражение:

$$\langle G^2 \rangle(H) = \langle G^2 \rangle + \frac{\alpha_s^2}{3\pi\beta(\alpha_s)} (eH)^2 \left[1 + 2 \frac{eH}{(4\pi F_\pi)^2} (\bar{l}_6 - \bar{l}_5) \ln 2 \right]. \quad (34)$$

В силу асимптотической свободы $\beta(\alpha_s) < 0$ и, соответственно, глюонный конденсат уменьшается с ростом магнитного поля. В однопетлевом приближении для хромодинамической β -функции ($\beta(\alpha_s) = -b_0\alpha_s^2/2\pi$) данное изменение есть

$$\Delta \langle G^2 \rangle = -\frac{2\pi}{3b_0} (eH)^2 \left[1 + 2 \frac{eH}{(4\pi F_\pi)^2} (\bar{l}_6 - \bar{l}_5) \ln 2 \right]. \quad (35)$$

Введем безразмерную переменную $x = eH/(4\pi F_\pi)^2$. Подставляя в (33) приведенные выше численные значения, зависимость кваркового конденсата как функции x переписываем в виде

$$\Sigma(x)/\Sigma = 1 + x \ln 2 - ax^2 \ln x - bx^2. \quad (36)$$

Здесь $a \simeq 0.9$ и $b \simeq 0.65 \pm 1.77$, где для коэффициента b мы использовали два значения d^r из (30). Заметим, что поведение кваркового конденсата принципиально зависит от знака d^r . При $d^r > 0$ кварковый конденсат начинает уменьшаться в области напряженности поля $x > 0.23$.

4. Таким образом, в рамках КТВ получено двухпетлевое выражение для плотности энергии вакуума и майдена зависимость кваркового и глюонного конденсатов от величины H . Мы видим, что глюонный конденсат уменьшается с увеличением H , в то время как киральный конденсат Σ , в зависимости от выбора знака d^r , на двухпетлевом уровне киральной теории возмущений либо продолжает расти (как это имеет место для одной петли), либо уменьшается с ростом H . Заметим, что падение конденсата Σ происходит в области применимости КТВ в магнитном поле $eH/(4\pi F_\pi)^2 < 1$. Как обсуждалось выше, из сравнения с экспериментальными данными однозначно определить значение d^r не представляется возможным. Мы не будем приводить здесь различные спекулятивные рассуждения о поведении Σ в магнитном поле. Ограничимся лишь утверждением, что возрастание или убывание кваркового конденсата с H может быть определено лишь тогда, когда коэффициенты в эффективном киральном лагранжиане будут вычислены из первопринципов КХД.

В заключение выражаем благодарность Б.Л.Иоффе и Ю.А.Симонову за обсуждение результатов и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант #97-02-16131) и CRDF RP2-132.

-
1. S.P.Klevansky and R.H.Lemmer, Phys. Rev. **D39**, 3478 (1989).
 2. I.A.Shushpanov and A.V.Smilga, Phys. Lett. **402B**, 351 (1997).
 3. J.Gasser and H.Leutwyler, Ann. Phys. (N.Y.) **158**, 142 (1984); J.Gasser and H.Leutwyler, Nucl. Phys. **B250**, 465 (1985).
 4. J.Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951); *Particles, Sources, and Fields*, Addison-Wesley, 1973.
 5. A.Chodos, K. Everding, and D.A.Owen, Phys. Rev. **42**, 2881 (1990).
 6. J.Honerkamp and K.Meetz, Phys. Rev. **D2**, 1996 (1971); J.M.Charap, Phys. Rev. **D2**, 1998 (1971); I.A.Shushpanov and A.V.Smilga, Phys. Rev. **D59**, 054013 (1999).
 7. J.Bijnens, G.Colangelo, and G.Ecker, hep-ph/9907333.
 8. S.Bellucci, J.Gasser, and M.E. Sainio, Nucl. Phys. **B423**, 80 (1994).