

О НИЖНЕМ КРИТИЧЕСКОМ ПОЛЕ И ФАЗОВОЙ ДИАГРАММЕ ТОНКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СВЕРХПРОВОДНИКА ВТОРОГО РОДА

Е.А.Шаповал¹⁾

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы
119361 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 февраля 1999 г.

В рамках теории Гинзбурга – Ландау найдено нижнее критическое поле сверхпроводящего цилиндра $H_{c1}^{cy1}(T)$ при различных граничных условиях, когда его радиус $r_0 \sim \xi(T) \ll \lambda(T)$. Эти результаты, наряду с известными результатами для верхнего поля, использованы для построения фазовых диаграмм в переменных поля и приведенного радиуса $r_0/\xi(T)$. Вычислен скачок средней намагниченности при H_{c1}^{cy1} в зависимости от приведенного радиуса.

PACS: 74.25.Bt, 74.60.Ec

В последнее время много внимания уделяется экспериментальному и теоретическому исследованию мезоскопических объектов. В частности, большой интерес привлекает поведение сверхпроводящего диска в магнитном поле вблизи верхнего критического поля, когда его радиус порядка длины когерентности [1-4]. Верхнее критическое поле сплошного и полого цилиндров при различных граничных условиях было рассмотрено в работе [5], однако вихревая структура сверхпроводящего цилиндра или диска вблизи нижнего критического поля рассматривалась до сих пор лишь в лондоновском приближении, когда их радиус r_0 много больше длины когерентности $\xi(T)$ [6,7]. Поэтому проблема вычисления нижнего критического поля цилиндра при $r_0 \sim \xi(T)$ остается до сих пор открытой.

Предлагаемая работа посвящена вычислению в рамках теории Гинзбурга – Ландау (ГЛ) нижнего критического поля, параллельного оси сплошного сверхпроводящего цилиндра, и скачка его средней намагниченности при этом переходе, когда $r_0 \sim \xi(T) \ll \lambda(T)$ – глубины проникновения, то есть при $\kappa \gg 1$. Рассмотрены два предельных случая граничных условий, $(\nabla - 2ie\mathbf{A})\Psi = 0$ и $\Psi = 0$. Полученные результаты сохраняют силу при первом граничном условии, – для цилиндра произвольной высоты, включая тонкий диск, а при втором условии, – когда его высота значительно больше $\xi(T)$. Наши результаты, наряду с известными результатами для верхнего критического поля [5], использованы для построения фазовых диаграмм в приведенных переменных внешнего поля и радиуса цилиндра.

В работе Бёбеля [8] было найдено в лондоновском приближении выражение для нижнего критического поля цилиндра, справедливое, когда его радиус $r_0 \gg \xi(T)$:

$$\frac{H_{c1}^{cy1}(T)}{\sqrt{2}H_c(T)} = \frac{1}{2\kappa} \left(\ln \kappa + C_1 - \frac{K_0(r'_0)}{I_0(r'_0)} \right) \frac{I_0(r'_0)}{I_0(r'_0) - 1}, \quad (1)$$

где, как обычно в теории ГЛ, $r' = r/\lambda(T)$, то есть длина измеряется в единицах глубины проникновения, K_0 и I_0 – модифицированные функции Бесселя, а константа C_1 входит в известное выражение Абрикосова для нижнего критического поля

¹⁾ e-mail: shap@mics.msu.su

массивного сверхпроводника второго рода [9]:

$$\frac{H_{c1}(T)}{\sqrt{2}H_c(T)} = \frac{1}{2\kappa} (\ln \kappa + C_1). \quad (2)$$

До сих пор нет единого мнения относительно численного значения этой константы при $\kappa \gg 1$. Иногда используют полученное в оригинальной работе [9] значение $C_1 = 0.081$ [8,10,11], хотя уже из простого вариационного метода Клемма [12] следует, что $C_1 \approx 0.52$, а численное решение нелинейного дифференциального уравнения ГЛ для изолированного вихря, предпринятое Ху [13], привело к значению $C_1 = 0.4968$. Проведенное нами независимо, то есть еще до знакомства с работой [13], численное решение дифференциального уравнения ГЛ с помощью программы Mathematica 2.2 привело нас к значениям $C_1 = 0.496815$, а также $C_0 = -0.282276$, которые входят в выражение для поля в центре изолированного вихря:

$$\frac{H(T, 0)}{\sqrt{2}H_c(T)} = \frac{1}{\kappa} (\ln \kappa + C_0). \quad (3)$$

Таким образом, наши результаты превосходно согласуются с результатами работы [13], где было найдено, что $C_0 = -0.2823$.

Вернемся к рассмотрению цилиндрического сверхпроводника. Учитывая поведение модифицированных функций Бесселя при малых значениях аргумента, из (1) находим, что при $\kappa \gg 1$ и $\xi(T) \ll r_0 \ll \lambda(T)$ нижнее критическое поле

$$\frac{H_{c1}^{cyl}(T)}{H_{c2}(T)} \equiv h_{c1}^{cyl} = \frac{2}{\rho_0^2} (\ln \rho_0 + 0.380884), \quad 1 \ll \rho \ll 1/\kappa. \quad (4)$$

Здесь мы ввели и далее будем использовать более удобные в нашей задаче единицы длины и напряженности поля: $\rho = r/\xi(T)$, $h = H/H_{c2}(T)$, где $H_{c2}(T) = \sqrt{2}\kappa H_c(T) = \phi_0/2\pi\xi^2(T)$ – верхнее критическое поле массивного сверхпроводника, а ϕ_0 – квант потока. Обратим внимание, что в этой области нижнее поле цилиндра не зависит от глубины проникновения, растет с уменьшением его радиуса в основном как $1/r_0^2$ и приближается по порядку величины к верхнему полю, когда $r_0 \rightarrow \xi(T)$.

Чтобы найти нижнее критическое поле цилиндра при $r_0 \sim \xi(T)$, обратимся к системе уравнений ГЛ. Учитывая симметрию задачи, полагаем, что параметр порядка $\Psi(\rho, \varphi, z) = \Psi_0 f(\rho) e^{im\varphi}$. Тогда функционал свободной энергии ГЛ во внешнем магнитном поле h_0 с точностью до постоянного множителя равен

$$\mathcal{F}_H = \frac{2\pi}{\kappa^2} \int_0^{\rho_0} \left(f'^2 + \left(A(\rho) - \frac{m}{\rho} \right)^2 f^2 + \kappa^2 h(\rho)^2 \right) \rho d\rho - 2h_0 \Phi, \quad (5)$$

где Φ – поток поля через сечение цилиндра:

$$\Phi = 2\pi \int_0^{\rho_0} h(\rho) \rho d\rho. \quad (6)$$

Уравнения ГЛ с учетом уравнений Максвелла имеют в нашем случае следующий вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df}{d\rho} \right) - \left(A(\rho) - \frac{m}{\rho} \right)^2 f + f(1 - f^2) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{dh}{d\rho} = \frac{f^2}{\kappa^2} \left(A(\rho) - \frac{m}{\rho} \right); \quad h = \frac{d}{\rho d\rho} (\rho A(\rho)). \quad (8)$$

Граничные условия для этих уравнений

$$\begin{aligned} f'(0) = 0, \text{ если } m = 0, \text{ или } f(0) = 0, \text{ если } m \neq 0, \quad h'(0) = 0, \\ f'(\rho_0) = 0 \text{ или } f(\rho_0) = 0, \quad h(\rho_0) = h_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Как уже было сказано, здесь будут рассмотрены два предельных случая граничных условий на поверхности цилиндра: первый, когда $f'(\rho_0) = 0$, что имеет место на границе обычного сверхпроводника с вакуумом или диэлектриком, и второй, когда $f(\rho_0) = 0$, что фактически осуществляется на границе с нормальным металлом [14,15] или на границе d -сверхпроводника при диффузном отражении [16].

Из уравнения (8) видно, что при больших значениях параметра κ дополнительное поле внутри цилиндра, создаваемое мейснеровским и вихревым токами, значительно меньше, порядка $1/\kappa^2$ относительно внешнего однородного поля h_0 , что вполне естественно, если учесть большую, сравнительно с радиусом цилиндра, глубину проникновения. Поэтому, когда $\kappa \gg 1$, при решении первого уравнения ГЛ (7) можно пренебречь этим дополнительным полем, полагая в этом уравнении $A(\rho) = h_0\rho/2$. Так нельзя поступить при вычислении свободной энергии (5) из-за третьего члена под интегралом и последнего члена. Однако, проинтегрировав это выражение по частям с учетом уравнения (7) и граничных условий (9) и вычислив дополнительное поле из уравнения (8), получаем с точностью до членов второго порядка по $1/\kappa$:

$$\mathcal{F}_H = \pi \int_0^{\rho_0} (1 - f^4(\rho)) \rho d\rho - \pi h_0^2 \rho_0^2. \quad (10)$$

Из условия равенства свободных энергий безвихревого и одновихревого состояний в точке перехода следует, что при $H_0 = H_{c1}^{cyt}$ должно быть

$$\int_0^{\rho_0} f_0^4 \rho d\rho = \int_0^{\rho_0} f_1^4 \rho d\rho, \quad (11)$$

где индекс указывает на азимутальное число параметра порядка.

Результаты вычисления нижнего критического поля в зависимости от радиуса цилиндра при граничном условии $f'(\rho_0) = 0$ показаны нижней сплошной кривой 1 на рис.1, где изображена фазовая диаграмма, включающая нормальное (область А), вихревые (область В) и безвихревое (область С) сверхпроводящие состояния. Нижняя штриховая кривая 2 – асимптотика нижнего поля при $\rho_0 \rightarrow \infty$, описываемая предельным выражением лондоновского приближения (4).

Верхняя ломаная кривая 3 на рис.1 – верхнее критическое поле, определяемое как максимальное поле, при котором впервые появляется нетривиальное решение линеаризованного первого уравнения ГЛ (7), когда $f \rightarrow 0$, а $A(\rho) = h_0\rho/2$. Решение этого уравнения выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi(a, c; x)$ [4,7]:

$$f_m(\rho) = \rho^m \exp\left(-\frac{h_0\rho^2}{4}\right) \Phi\left(\frac{h_0-1}{2h_0}, m+1; \frac{h_0\rho^2}{2}\right). \quad (12)$$

Используя граничное условие $f'(\rho_0) = 0$ и рекуррентные соотношения для вырожденной гипергеометрической функции, можно найти трансцендентное уравнение, определяющее в неявном виде зависимость магнитного поля от радиуса цилиндра и азимутального числа m , определяющего кратность центрального вихря:

$$(m+x)\Phi\left(\frac{h_0-1}{2h_0}, m+1, x\right) = 2m\dot{\Phi}\left(\frac{h_0-1}{2h_0}, m, x\right), \quad (13)$$

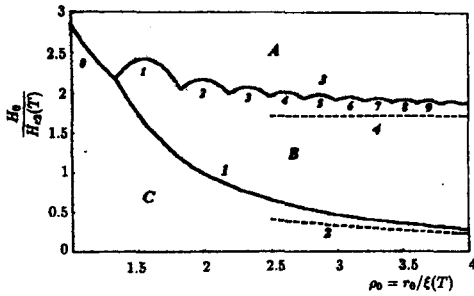


Рис.1

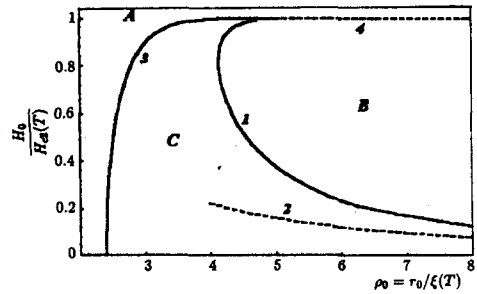


Рис.2

Рис.1. Фазовая диаграмма цилиндра при $(\nabla - 2ieA)\Psi = 0$ на его поверхности. Область *A* – нормальное, *B* – вихревое, *C* – безвихревое состояния. Нижняя сплошная кривая 1 – приведенное нижнее критическое поле цилиндра $h_{c1}^{cyl} = H_{c1}^{cyl}(T)/H_{c2}(T)$ в зависимости от его приведенного радиуса $\rho_0 = r_0/\xi(T)$. Нижняя штриховая кривая 2 – его асимптотика, когда $r_0 \gg \xi(T)$ (4). Верхняя ломаная кривая 3 – приведенное верхнее критическое поле цилиндра $h_{c2}^{cyl} = H_{c2}^{cyl}(T)/H_{c2}(T)$. Цифры под ее участками указывают на значение азимутального числа, то есть кратность вихря. Верхняя штриховая кривая 4 – его асимптотика, равная поверхностному критическому полю массивного образца $h_{c3} = 1.695$

Рис.2. Фазовая диаграмма цилиндра при граничном условии $\Psi = 0$ на поверхности. Обозначения те же, что и на рис.1, кроме верхней штриховой кривой – асимптотики верхнего критического поля, равной здесь верхнему критическому полю массивного образца $h_{c2} = 1$

где $x = h_0\rho_0^2/2$. Сравнивая при заданном ρ_0 величину магнитных полей при различных значениях азимутального числа m , выбираем максимальное значение, находя таким образом верхнее критическое поле цилиндра как функцию его приведенного радиуса. Цифры под участками верхней кривой 3 на рис.1 указывают на соответствующее азимутальное число m .

Осцилляции верхнего критического поля в зависимости от радиуса цилиндра напоминают осцилляции эффекта Литтла – Паркса в случае полого цилиндра [17]. Это не удивительно. Граничное условие $f'(\rho_0) = 0$ благоприятствует появлению поверхностной сверхпроводимости, что приводит к тому, что сверхпроводящий цилиндр становится в некотором роде подобен полному цилиндру. Верхнее критическое поле сплошного цилиндра больше, как видно из диаграммы на рис.1, поверхностного поля массивного образца $H_{c3}(T)$, равного в наших единицах 1.695 и показанного на рис.1 верхней штриховой линией 4. Из этого рисунка также видно, что при $\rho_0 < 1.333$ цилиндр переходит из нормального сразу в безвихревое состояние, мнущая смешанное, когда поле уменьшается.

Смешанное состояние (область *B*) включает при $H_0 > H_{c2}(T)$ фазы с гигантским вихрем в центре цилиндра различной кратности m . Такой гигантский вихрь с уменьшением внешнего поля, где-то при $H_0 < H_{c2}(T)$, распадается на единичные вихри, так что цилиндр переходит в абрикосовскую фазу [3,18].

На рис.2 показана фазовая диаграмма в другом предельном случае граничных условий на поверхности цилиндра, когда $f(\rho_0) = 0$. Смысл обозначений на этой диаграмме тот же, что и выше, существенная разница состоит в том, что здесь не возникает состояний с гигантским вихрем, а верхнее критическое поле цилиндра оказывается меньше верхнего критического поля массивного образца $H_{c2}(T)$, равного в наших единицах измерения $h = 1$ и показанного на диаграмме верхней штриховой линией 4. Это связано с подавлением сверхпроводимости на поверхности

цилиндра при нулевом граничном условии. По той же причине верхнее критическое поле обращается в нуль, когда $\rho_0 = r_0/\xi(T) = j_{01} = 2.4048$ (первый нуль функции Бесселя нулевого порядка), что соответствует известному эффекту понижения температуры сверхпроводящего перехода малых образцов при нулевых граничных условиях для параметра порядка. Если $\rho_0 < 4.14$, с понижением внешнего поля цилиндр переходит при $H = H_{c2}^{cyt}(T)$ из нормального сразу в безвихревое сверхпроводящее состояние, оставаясь в нем вплоть до нулевого поля. Если же $\rho_0 > 4.14$, тонкий цилиндр вначале переходит из нормального состояния в сверхпроводящее безвихревое состояние (в быстро сужающуюся с ростом ρ_0 область C), а уже затем при $H = H_{c1}^{cyt}(T)$ (верхняя ветвь кривой 1) переходит в область абрикосовского состояния B , и, наконец, при $H = H_{c1}^{cyt}(T)$ (нижняя ветвь кривой 1) опять в безвихревое сверхпроводящее состояние C .

Таким образом, по поведению цилиндра в магнитном поле можно, в частности, судить о граничных условиях на его поверхности и, следовательно, о симметрии параметра порядка. Очевидно, что полученные результаты сохраняют силу для цилиндра любой высоты при условии $(\nabla - 2ie\mathbf{A})\Psi = 0$ на его плоских поверхностях, а при условии $\Psi = 0$ справедливы, пока его высота значительно больше длины когерентности.

Для вычисления намагниченности рассматриваемого здесь очень тонкого цилиндра можно, как и выше, в правой части второго уравнения ГЛ (8) с точностью $1/\kappa^2$ положить $A(\rho) = h_0\rho/2$. Тогда средняя намагниченность цилиндра в одновихревом состоянии равна

$$\frac{4\pi \langle M \rangle}{H_{c2}(T)} = \frac{\langle B \rangle - H_0}{H_{c2}(T)} = \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{2}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} f^2 \rho d\rho - \frac{h_0}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} f^2 \rho^3 d\rho \right). \quad (14)$$

Первый член правой части определяет магнитный момент, вызванный вихревыми токами, а второй — мейсснеровскими токами экранирования, поэтому в безвихревом состоянии имеет силу то же выражение, но без первого члена. В силу того, что $H_{c2}(T) \sim \kappa^2 H_{c1}(T)$, средняя намагниченность оказывается порядка нижнего критического поля массивного образца.

Из (14) следует, что скачок средней намагниченности при переходе из безвихревого в одновихревое состояние равен

$$4\pi \frac{\langle \Delta M \rangle}{H_{c2}(T)} = \frac{\langle \Delta B \rangle}{H_{c2}(T)} = \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{2}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} f_1^2 \rho d\rho - \frac{h_{c2}^{cyt}}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} (f_1^2 - f_0^2) \rho^3 d\rho \right). \quad (15)$$

При $\lambda(T) \gg r_0 \gg \xi(T)$ (то есть $\kappa \gg \rho_0 \gg 1$) из (15) находим

$$4\pi \frac{\langle \Delta M \rangle}{H_{c2}(T)} = \frac{\langle \Delta B \rangle}{H_{c2}(T)} = \frac{1}{2\kappa^2}, \quad (16)$$

где h_{c2}^{cyt} определяется уравнением (4). Этот результат, естественно, совпадает с полученным в лондоновском приближении [8].

На рис.3 показаны зависимости скачка средней приведенной намагниченности от приведенного радиуса при граничных условиях $f' = 0$ (верхняя сплошная кривая 1) и $f = 0$ (нижняя сплошная кривая 2). Штриховой кривой 3 показана их асимптотика (16) при $\rho_0 \rightarrow \infty$. Обратим внимание, что при втором граничном условии скачек намагниченности (кривая 2) меняет знак при $\rho_0 = 4.14$, что более

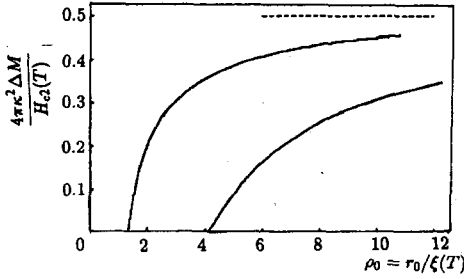


Рис.3. Скачок средней приведенной намагниченности $4\pi\kappa^2 < \Delta M > / H_{c2}(T)$ в зависимости от приведенного радиуса. Кривая 1 – при граничном условии $(\nabla - 2ie\mathbf{A})\Psi = 0$, кривая 2 – при граничном условии $\Psi = 0$. Штриховая кривая 3 – их асимптотика (16) при больших ρ

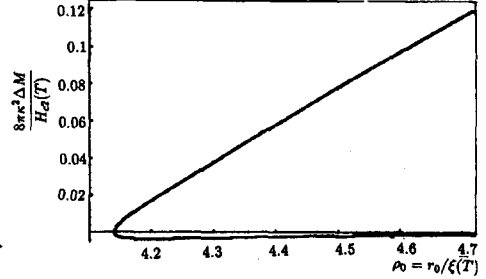


Рис.4. Укрупненное изображение скачка намагниченности при втором граничном условии вблизи $\rho = 4.14$

подробно показано на рис.4. Нижняя ветвь этой кривой соответствует верхней ветви нижнего поля (кривая 1) на рис. 2. Этот эффект можно наблюдать, по-видимому, в случае тонкого цилиндра, заключенного в оболочку из нормального металла, обеспечивая таким образом необходимое граничное условие $\Psi = 0$.

Как и в случае поля, полученные результаты для скачка намагниченности имеют силу для цилиндра произвольной высоты с указанным выше ограничением.

Работа поддерживается Научным советом направления "Сверхпроводимость" Государственной научно-технической программы "Актуальные направления физики конденсированных сред" в рамках проекта # 96024 и выполнена в Центре физических исследований им. П.Н.Лебедева.

1. A.K.Geim, I.V.Grigorieva, S.V.Dubonos et al., *Nature* **390**, 259 (1997).
2. V.A.Schweigen and F.M.Peeters, *Phys. Rev.* **B57**, 13817 (1998).
3. V.V.Moshchalkov, L.Gielen, C.Strunk et al., *Nature* **373**, 319 (1995).
4. V.V.Moshchalkov, X.G.Qui, and V.Bruyndonex, *Phys. Rev.* **B55**, 11793 (1997).
5. N.C.Constatinou, M.Masale, and D.R.Tilley, *J. Phys.: Cond. Mat.* **4**, 4499, L293 (1992).
6. A.S.Krasilnikov, L.G.Mamsurova, K.K.Puchov et al., *Physica C* **235-240**, 2859 (1994); *Supercond. Sci. Technol.* **8**, 1 (1995).
7. A.I.Buzdin and J.P.Brison, *Phys. Lett.* **A196**, 267 (1994).
8. G.Böbel, *Nuovo Cim.* **38**, 1740 (1965).
9. А.А.Абрикосов, *ЖЭТФ* **46**, 1464 (1957).
10. А.А.Абрикосов, *Основы теории металлов*, М.: Наука, 1987.
11. O.N.Shevtsova and S.V.Shiyanovskii, *Phys. Stat. Sol.* **B207**, 455 (1998).
12. J.R.Clem, *J.Low Temp. Phys.* **18**, 427 (1975).
13. Chia-Ren Hu, *Phys. Rev.* **B6**, 1756 (1972).
14. P.G. de Gennes and J.Matricon, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 45 (1964).
15. Р.О.Зайцев, *ЖЭТФ* **48**, 664, 1759 (1996).
16. Е.А.Шаповал, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 350 (1996).
17. W.A.Little and R.D.Parks, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 9 (1962).
18. H.J.Fink and A.G.Presson, *Phys. Rev.* **151**, 219 (1962).