Письма в ЖЭТФ, том 69, вып.10, стр.691 - 697

РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ РЭЛЕЯ – ТЕЙЛОРА И РИХТМАЙЕРА – МЕШКОВА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ: ТОПОЛОГИЯ ВИХРЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н.А.Иногамов, А.М.Опарин+

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

+Институт автоматизации проектирования РАН
123056 Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 апреля 1999 г.

Рассматривается эволюция границы жидкости при развитии перемешивающих неустойчивостей. Вихревые нити, перемещающие жидкие массы, являются образующими граничной поверхности. Имеется глубокое различие между двумерными (2D) и трехмерными (3D) движениями. В первом случае вихри прямолинейны в плоской ($2D_p$) и кольцеобразны в осесимметричной ($2D_a$) геометриях. Во втором случае формы вихрей очень сложны. Исследованы пространственно-периодические ("одномодовые") решения, важные в теории перемешивания. Эти решения описывают одномерные цепочки чередующихся пузырей и струй в $2D_p$ геометрии и плоские (двумерные) решетки пузырей и струй в 3D геометрии. Получено аналитическое описание основных типов решеток (прямоугольной, гексагональной и треугольной). Аналитика сопоставляется с результатами численного моделирования.

PACS: 47.15.Ki, 47.20.-k, 52.35.Mw

Как известно, гидродинамические неустойчивости играют существенную роль в астрофизике, в инерционном синтезе и в физике взрыва. Представление о современном состоянии исследований может быть составлено по работам [1 – 16]. На неустойчивой поверхности раздела разноплотных жидкостей образуются пузыри и струи. Пузыри (струи) представляют собой колонки легкого (тяжелого) вещества, проникающего в тяжелое (легкое) вещество. На поздних стадиях субгармоническая неустойчивость периодических решений приводит к укрупнению характерного масштаба перемешивания и развитию инверсного каскада [3 – 5, 8, 10, 11, 17].

В модели Лейцера [18], трехмерному (3D) обобщению которой посвящена данная работа, используется параболическая аппроксимация границы в окрестности вершины пузыря. Это позволяет получить систему динамических уравнений на скорость и кривизну пузыря [7, 8, 11 – 13, 16]. Решения системы описывают переход из начального слабо возмущенного состояния в сильно нелинейное состояние (в стационар или в стационарную точку), в котором неустойчивость "насыщается" из-за компенсации нелинейными членами. В недавних работах [7, 11 – 13, 16] получены точные аналитические решения лейцеровской системы в двумерной (2D) геометрии. В [11] выписано точное решение в случае квадратной решетки. Ниже представлены 3D нестационарные решения в случае широкого класса разных решеток. Отметим, что задача о стационарных точках при рэлей-тейлоровской неустойчивости (РТН) рассматривалась в [9, 11, 12, 15] (квадратная решетка) и в [15] (гексагональная решетка). Разумеется, задача о РТ стационаре ýже полной постановки, в которой рассматриваются РТН, неустойчивость Рихтмайера – Мешкова (РМН) и нестационарный переход, имеющий стационар в качестве предела эволюции по времени. Анализу высших лейцеровских приближений, в которых поверхность аппроксимируется не параболой ($N = 1$), а полиномом степени $2N$ ($N > 1$), посвящены работы [7, 12]. Трехмерному численному моделированию посвящены работы [10, 19–22].

Аналогично работам [1, 2, 7–9, 11–13, 15–17] рассмотрим несжимаемую, невязкую жидкость с бесконечным отношением плотностей на границе. Завихренность сосредоточена на границе, внутри жидкости движение потенциально. Уравнения движения имеют вид

$$\Delta\varphi = 0,\ \eta_t = \varphi_z|_\eta - \eta_x\varphi_x|_\eta - \eta_y\varphi_y|_\eta,\ \ -2\varphi_t|_\eta = \varphi_x^2|_\eta + \varphi_y^2|_\eta + \varphi_z^2|_\eta + 2g\eta, \tag{1}$$

где $z = \eta(x, y, t)$ – граница жидкости, жидкость находится при $z > \eta$, $\mathbf{g} = \{0, -g\}$ – гравитационное ускорение, $g = 0$ при РМН и $g = 1$ при РТН, $\varphi(x, y, z, t)$ – 3D потенциал скорости ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$), спектральное разложение которого имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{nm}}{q_{nm}}\cos nx\,\cos mqy\,\exp(-q_{nm}z),\ q_{nm} = \sqrt{n^2 + m^2q^2}, \tag{2}$$

$$\varphi = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{nm}}{q_{nm}}(c_nc_m^+ + s_ns_m^+ + c_nc_m^- + s_ns_m^- + c_n^+c_m^- - s_n^+s_m^-)e_{nm}, \tag{3}$$

$$c_n = \cos nx,\ c_n^\pm = \cos n\xi^\pm,\ s_n = \sin nx,\ s_n^\pm = \sin n\xi^\pm,\ \xi^\pm = \frac{x \pm \sqrt{3}y}{2},$$

$$e_{nm} = \exp(-q_{nm}z), \qquad q_{nm} = \sqrt{n^2 - nm + m^2}.$$

Ряд (2) относится к прямоугольной решетке, частным случаем которой при отношении сторон прямоугольника $q = 1$ является квадратная решетка, а ряд (3) – к гексагональной и треугольной решеткам.

В модели Лейцера разложения (2), (3) обрываются на первых членах. Потенциалы гексагональной (φ_6), квадратной (φ_4), треугольной (φ_3) и прямоугольной (φ_2) решеток пузырей имеют вид

$$\varphi_6 = -\frac{a(t)}{3}(c + c^+ + c^-)e^{-z}, \qquad c = \cos x,\ c^\pm = \cos\xi^\pm, \tag{4}$$

$$\varphi_4 = -\frac{a(t)}{2}(\cos x + \cos y)e^{-z}, \tag{5}$$

$$\varphi_3 = \frac{a(t)}{6}(c - \sqrt{3}s + c^+ + \sqrt{3}s^+ + c^- + \sqrt{3}s^-)e^{-z},\ s = \sin x,\ s^\pm = \sin\xi^\pm, \tag{6}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\hat{a}(t)}{2}\cos x\, e^{-z} - \frac{\hat{b}(t)}{2q}\cos qx\, e^{-qz}. \tag{7}$$

Вершины пузырей во всех случаях находятся в центре $x = y = 0$, $a > 0$ в (4, 5), $a < 0$ в (6) и $\hat{a} > 0, \hat{b} > 0$ в (7).

В случае гексагона, квадрата и треугольника главные кривизны поверхности η в вершине пузыря совпадают. Поэтому разложение границы жидкости в окрестности этой вершины имеет вид

$$\eta(x, y, t) = \eta_0(t) - K(t)\frac{\Delta}{2}, \qquad \Delta = x^2 + y^2. \tag{8}$$

В случае прямоугольника главные кривизны различны. Соответственно,

$$\eta(x,y,t) = \eta_0(t) - Kx^2/2 - Qy^2/2. \tag{9}$$

Разлагая потенциалы (4) – (7) по степеням x^2, y^2 малых отклонений от вершины, подставляя эти разложения и разложения (8), (9) в краевые условия (1), оставляя только квадратичные по x и y члены, приходим к системам динамических уравнений:

$$\dot{K} = \frac{1-4K}{2}W, \qquad \dot{W} = -\frac{W^2 - 4gK}{2(1-2K)}, \tag{10}$$

$$\dot{K} = (1-3K)a - qKb, \tag{11}$$

$$\dot{Q} = -Qa + q(q-3Q)b, \tag{12}$$

$$(1-K)\dot{a} - K\dot{b} = -a^2 + gK, \tag{13}$$

$$-Q\dot{a} + (q-Q)\dot{b} = -q^2b^2 + gQ. \tag{14}$$

Система (10) оказывается универсальной. Она описывает гексагональные, квадратные и треугольные решетки пузырей. Система (11) – (14) относится к прямоугольной решетке. В (10) $W = \dot{\eta}_0$ – скорость подъема пузыря, в (11) – (14) эта скорость равна $a+b$.

При $g=0$ (РМН) система (10) легко интегрируется. Ее решение имеет вид

$$\sqrt{\frac{1-2K}{1-4K}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(1-2K)}+\sqrt{1-4K}}{\sqrt{2}+1} = W_0 t,$$

$$\frac{W_0}{W} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\,\frac{\sqrt{2}W_0 - W}{\sqrt{2}W_0 + W}\right) = W_0 t.$$

Из анализа систем (10) и (11) – (14) следует, что они описывают переход из начального состояния с малой амплитудой возмущения в стационар при $t \to \infty$. Стационарное состояние – узел, собирающий все траектории. В случае уравнений (10) это легко показать, построив фазовую плоскость K, W. В случае системы (10) – (14) это следует из анализа устойчивости стационаров.

Представим стационарные решения. При $g=1$ (РТН) имеем

$$K = 1/4, \qquad W = 1. \tag{15}$$

При $g=0$ (РМН) имеем

$$K = 1/4, \qquad W = 1/t. \tag{16}$$

Стационары (15), (16) соответствуют гексагональным, квадратным и треугольным решеткам пузырей.

Случай прямоугольной решетки сложнее. Рассмотрим РТН. Положим $\dot{K} = \dot{Q} = \dot{a} = \dot{b} = 0$ в уравнениях (11) – (14). Исключим неизвестные $a>0, b>0$ с помощью уравнений (13), (14) и Q с помощью уравнений (11), (12). В результате приходим к уравнению на K. Оно имеет вид

$$8K^2 - [6 + (q-1)/3]K + 1 = 0.$$

Сопоставляя со случаем квадрата $q = 1$, находим, что физический смысл имеет только корень

$$K(q) = (q + 17 - r)/48, \qquad r = +\sqrt{q^2 + 34q + 1}. \tag{17}$$

Остальные искомые функции даются выражениями

$$Q(q) = \frac{q-1}{3} + K(q), \quad a(q) = +\sqrt{K(q)}, \quad b(q) = +\frac{\sqrt{Q(q)}}{q}. \tag{18}$$

Стационар (17), (18) единственный в имеющей физический смысл области.

Рассмотрим РМН. В этом случае в стационаре кривизны K и Q являются постоянными, а амплитуды $a = \alpha/t, b = \beta/t$. Подставляя эти соотношения в систему (11) – (14), приходим к алгебраической системе на неизвестные K, Q, α и β. Исключая неизвестные β, α и затем Q, получаем уравнение

$$24(3 - q)K^3 + (q^2 + 46q - 75)K^2 + 2(13 - 11q)K + 3(q - 1) = 0 \tag{19}$$

на искомую функцию $K(q)$. Имеющий физический смысл корень отбирается из условия $K(1) = 1/4$, которое означает выход на случай квадратной решетки (16) при $q \to 1$. Пусть $K(q)$ – данный корень. Остальные функции выражаются через него. Имеем

$$Q = \frac{1 - 3K}{3 - 8K}q, \quad \alpha = 1 - \frac{1}{q} + \left(\frac{3}{q} - 1\right)K, \quad \beta = \frac{1 - 3K}{qK}\alpha, \quad w = \alpha + \beta. \tag{20}$$

При этом скорость движения пузырей равна w/t. Корень $K(q)$ существует на отрезке $1 < q < 1.26$. При $q > 1.26$ уравнение (19) не имеет нужных действительных корней. Поэтому в параболическом приближении физически корректное решение ограничено этим отрезком.

Исследуем решения (17), (18) и (19), (20) на устойчивость. Линеаризуем систему (11) – (14) около этих стационаров. Запишем

$$K(t) = K + \delta K\, e^{\lambda t}, \quad Q(t) = Q + \delta Q\, e^{\lambda t}, \quad a(t) = a + \delta a\, e^{\lambda t}, \quad b(t) = b + \delta b\, e^{\lambda t}$$

в случае РТН и

$$K(t) = K + \delta K\, t^{\lambda}, \quad Q(t) = Q + \delta Q\, t^{\lambda}, \quad a(t) = \frac{\alpha + \delta\alpha\, t^{\lambda}}{t}, \quad b(t) = \frac{\beta + \delta\beta\, t^{\lambda}}{t}$$

в случае РМН. Матрицы M на собственные числа λ имеют вид

$$\begin{array}{cccc}
-\lambda - 3a - qb & 0 & 1 - 3K & -qK \\
0 & -\lambda - a - 3qb & -Q & q^2 - 3qQ \\
1 & 0 & -(1 - K)\lambda - 2a & K\lambda \\
0 & 1 & Q\lambda & -(q - Q)\lambda - 2q^2 b
\end{array}$$

в случае РТН и

$$\begin{array}{cccc}
-\lambda - 3\alpha - q\beta & 0 & 1 - 3K & -qK \\
0 & -\lambda - \alpha - 3q\beta & -Q & q^2 - 3qQ \\
\alpha + \beta & 0 & (1 - K)(\lambda - 1) + 2\alpha & K(1 - \lambda) \\
0 & \alpha + \beta & Q(1 - \lambda) & (q - Q)(\lambda - 1) + 2q^2\beta
\end{array}$$

в случае РМН. В этих матрицах K, Q, a, b (РТН) и K, Q, α, β (РМН) даются выражениями (17), (18) и (19), (20), соответственно. Расчет характеристических уравнений $\det M = 0$ приводит к выводу об устойчивости решений (17), (18) и (19), (20).

Сравним гексагональную, квадратную и треугольную решетки. Из универсальности системы (10) следует неожиданный вывод о том, что при равных начальных значениях кривизны и скорости траектории, описывающие процесс эволюции этих разных решеток пузырей, будут одинаковыми. В частности, одинаковы предельные скорости движения и кривизны пузырей.

При равном волновом числе k в гексагональной, квадратной и треугольной решетках на один пузырь приходится площадь

$$S_6 = \frac{8\,\pi^2}{\sqrt{3}\,k^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}S_4, \qquad S_4 = \frac{4\,\pi^2}{k^2}, \qquad S_3 = \frac{4\,\pi^2}{\sqrt{3}\,k^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}S_4.$$

Потребуем равенства площадей. Тогда волновые числа решеток относятся как

$$k_6 : k_4 : k_3 = \sqrt{\frac{S_6}{S_4}} : 1 : \sqrt{\frac{S_3}{S_4}} = \frac{\sqrt{2}}{3^{1/4}} : 1 : \frac{1}{3^{1/4}} \approx 1.07 : 1 : 0.76.$$

В обратном отношении находятся радиусы R_6, R_4 и R_3 при РТН и РМН (радиус R_6 наименьший). По темпу переходного процесса решетки располагаются в порядке 6, 4, 3, то есть медленнее всего протекает переход в треугольной решетке. Зато предельная скорость пузырей в этой решетке наибольшая. Эти скорости относятся как

$$w_6 : w_4 : w_3 = (S_4/S_6)^{1/4} : 1 : (S_4/S_3)^{1/4} = (1/\sqrt{k_6}) : (1/\sqrt{k_4}) : (1/\sqrt{k_3}) =$$
$$= (3^{1/8}/2^{1/4}) : 1 : 3^{1/8} \approx 0.97 : 1 : 1.15$$

при РТН и как $(1/k_6) : (1/k_4) : (1/k_3)$ при РМН.

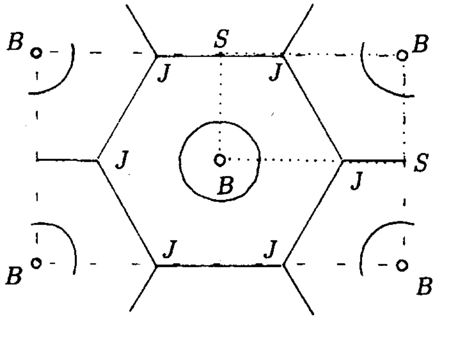

Рис.1. Гексагональная решетка, плоскости симметрии BB, BJ, JJ, вершины пузырей B и струй J. В случае треугольной решетки пузыри и струи меняются местами

Сравним полученные аналитические результаты с результатами численного моделирования. Интегрировалась полная система уравнений Эйлера сжимаемой невязкой среды, записанная в дивергентной форме [23,24]. Использовалась квазимонотонная сеточно-характеристическая схема второго порядка аппроксимации. Монотонность достигается за счет комбинации схем с центральными и ориентированными разностями. Аналогичный гибридный метод использовался для численного моделирования течений несжимаемой жидкости [25]. В расчетной схеме не используются ни искусственная вязкость, ни сглаживание, ни процедуры ограничения потока. Схема имеет такие полезные качества, как консервативность, монотонность и повышенный порядок аппроксимации. Требование монотонности обеспечивает нелинейную диссипацию, сглаживающую коротковолновые возмущения с длиной волны порядка нескольких шагов сетки. Область интегрирования имеет форму прямоугольного параллелепипеда, на боковых сторонах которого выполняются условия симметрии, а на нижней и верхней границах – условия непротекания. Ее поперечное сечение $BSBS$ в случае гексагональной решетки показано на рис.1 точками.

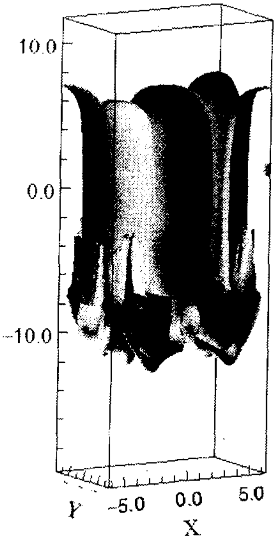

Рис.2. Топология границы раздела η, гексагональная решетка, поперечное сечение этой области – прямоугольник $BBBB$, показанный тонкими штрихами на рис.1

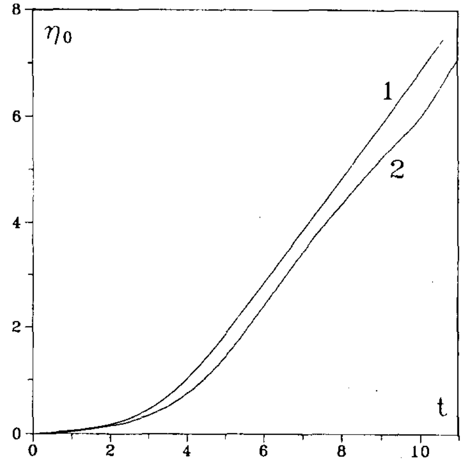

Рис.3. Сравнение аналитики (кривая 1) и численного моделирования (кривая 2)

Были изучены случаи квадратной и прямоугольной решеток с $q = \sqrt{2}, 2$ и 4 и случай гексагональной решетки. Согласие с теорией хорошее. Форма поверхности на момент $t = 11$ в случае гексагонального начального возмущения с малой амплитудой $a(0) = 0.05$ при $g = 1$ показана на рис.2. Рисунок получен сложением четырех расчетных параллелепипедов (прямоугольники $BSBS$ и $BBBB$ на рис.1). Видно формирование периодической структуры округлых пальцеобразных пузырей и топологически сложных вихревых образований в области взаимодействия струй тяжелой жидкости, падающих сверху (отношение плотностей $\mu = 1/10$), с подстилающей легкой жидкостью. На рис. 3 представлены зависимости смещения пузыря $\eta_0(t)$ в случае гексагональной решетки, показанной на рис. 2. Как видим, согласие аналитических и численных результатов хорошее.

Авторы выражают глубокую благодарность С.И. Анисимову и О.М. Белоцерковскому за внимание к работе. Авторы благодарят Российский фонд фундаментальных исследований (гранты # 99-02-16666 и # 97-01-00931) и Программы поддержки ведущих научных школ (гранты # 96-15-96448 и # 96-15-96137).

1. S.W.Haan, Phys. Fluids **B3,** 2349 (1991).
2. Н.А.Иногамов, Письма в ЖЭТФ **55,** 505 (1992).
3. S.Atzeni, A.Guerrieri, Europhys. Lett. **22,** 603 (1993).
4. D.L.Youngs, Laser Part. Beams **12,** 725 (1994).
5. J.F.Haas, I.Galametz, L.Houas et al., Chocs. Num. **14,** 15 (1995).
6. R.L.Holmes, J.W.Grove, and D.H.Sharp, J. Fluid Mech. **301,** 51 (1995).
7. Н.А.Иногамов, ЖЭТФ **107,** 1596 (1995).
8. U.Alon, J.Hecht, D.Ofer, and D.Shvarts, Phys. Rev. Lett. **74,** 534 (1995).
9. N.A.Inogamov and S.I.Abarzhi, Physica **D87,** 339 (1995).
10. M.M.Marinak, R.E.Tipton, B.A.Remington et al., Inertial Confinement Fusion **5,** 168 (1995).
11. N.A.Inogamov, *Proc. of the 6th Intern. Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing*, Eds. G.Jourdan and L.Houas, Institut Universitaire des Systemes Thermiques Industriels. Printed in France by Imprimerie Caractere, Marseille, 1997, 208.
12. N.A.Inogamov, Laser Part. Beams **15,** 53 (1997).
13. K.O.Mikaelian, Phys. Rev. Lett. **80,** 508 (1998).
14. M.M.Marinak, S.G.Glendinning, R.J.Wallace et al., Phys. Rev. Lett. **80,** 4426 (1998).
15. S.I.Abarzhi, Phys. Rev. Lett. **81,** 337 (1998).
16. Q.Zhang, Phys. Rev. Lett. **81,** 3391 (1998).
17. S.I.Anisimov, A.V.Chekhlov, A.Yu.Dem'yanov, and N.A.Inogamov, Russian J. of Computational Mechanics **1,** 5 (1993).
18. D.Layzer, Astrophys. J. **122,** 1 (1955).
19. Ю.М.Давыдов, М.С.Пантелеев, Жур. прикл. мех. и техн. физ. **1,** 117 (1981).
20. T.Yabe, H.Hoshino, and T.Tsuchiya, Phys. Rev. **A44,** 2756 (1991).
21. D.L.Youngs, Phys. Fluids **A3,** 1312 (1991).
22. X.L.Li, Phys. Fluids **8,** 336 (1996).
23. О.М.Белоцерковский, *Численное моделирование в механике сплошных сред*, М.: Физматлит, 1994.
24. О.М.Белоцерковский, *Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу*, М.: Наука, 1994.
25. О.М.Белоцерковский, В.А.Гущин, В.Н.Коньшин, Жур. вычислит. мат. и мат. физ. **27,** 594 (1987).