Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.8, стр.631 - 635 © 1995г. 25 апреля

ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА В ФЕРРОМАГНИТНОЙ ФАЗЕ МОДЕЛИ ДЕРРИДЫ ПРИ НУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ И КОДИРОВАНИЕ

Д.Б.Саакян

Ереванский физический институт

375036 Ереван, Армения

Поступила в редакцию 18 ноября 1994 г.

После переработки 23 января 1995 г.

Вычисляется свободная энергия. Выведено выражение для эффектов конечного объема, аналогичное вероятности ошибки декодирования для оптимального канала с сильным шумом.

Идеи теории информации вышли в свое время из физики (термодинамическая энтропия). В последние годы возникла ситуация, когда опять проявляется глубинная связь между этими науками: теорией кодирования, с одной стороны, и спиновыми стеклами, в другой. Исследование таких, граничных между двумя важными областями естествознания, эффектов может оказаться интересной для каждого из них. В [1] была выдвинута гипотеза, что модель Дерриды [2,3] дает оптимальное кодирование в смысле Шэннона (см. [4]). Эта гипотеза была доказана для общего случая в [5,6].

Поясним физический смысл проблемы. Хочется передать информацию из N чисел ξ_i, $i=1,...,N$. Вместо N чисел ξ_i отправляется сообщение из Z чисел τ_j, $j=1,...Z$, где эти τ вычисляются каким-то алгоритмом из N чисел ξ_i. В ходе передачи информации первоначальные τ_j с какой-то ненулевой вероятностью $(1-m)/2$ могут случайно менять свой знак, и с вероятностью $(1+m)/2$ сохранить значение. Мы обозначим новые константы τ_j'. Если без шума каждая из констант τ_j содержит информацию ln2, то теперь τ_j' содержит информацию поменьше,

$$\ln 2 - h(m) \equiv \ln 2 + \frac{1+m}{2}\ln\frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2}\ln\frac{1-m}{2}. \tag{1}$$

Надо строить алгоритм, который мог бы восстановить первоначальные значения N чисел ξ_i, из зашумленных констант τ_j'.

Давайте составим τ_j следующим образом. Для P индексов $i_1...i_P$ мы берем

$$\tau_{i_1...i_P} = \xi_{i_1}...\xi_{i_P}. \tag{2}$$

Из всех C_N^P разных наборов индексов $(i_1...i_P)$ мы случайным образом выбираем Z штук $\tau_{i_1...i_P}$. С помощью Z констант связи строится функция из N переменных σ_i:

$$H(\sigma_i, \xi_j) = -\sum_{(i_1...i_P)} \tau'_{i_1...i_P}\sigma_{i_1}...\sigma_{i_P}. \tag{3}$$

В (3) идет суммирование по Z разным наборам индексов $(i_1,...,i_P)$.

Когда m равен 1, то $\tau_j' = \tau_j$ и основным состоянием гамильтониана (3) является конфигурация $\sigma_i = \xi_i$. Как было доказано в [5], конфигурация $\sigma_i = \xi_i$

остается основным состоянием гамильтониана (3) при ненулевых значениях вероятности шума $(1-m)/2$, вплоть до значения m, определенного из равенства

$$Z[\ln 2 - h(m)] = N \ln 2. \tag{4}$$

Таким образом, схема кодирования по [1] следующая. Исходная информация – это значения N спинов ξ_i. Из них составляются Z чисел τ_j. В ходе передачи информации они частично заменяются на τ'_j. Для декодирования ищут основное состояние гамильтониана, рассмотрев, например, термодинамику системы при $T \to 0$. При этом можно вычислить также среднюю намагниченность

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} < \sigma_i > \xi_i. \tag{5}$$

В ферромагнитной фазе, $M \approx 1$, имеются лишь экспоненциально малые поправки

$$M \approx 1 - C \exp[-E(m, R)N], \tag{6}$$

где $R \equiv N/Z$ называется в теории информации скоростью передачи информации.

Для оптимального кодирования $E(m, R) > 0$ для $R < R_c$. При этом $E(m, R)$ зависит от конкретного способа кодирования. Существует некое максимальное значение, выше которого $E(m, R)$ не может подниматься. В дальнейшем, говоря о $E(m, R)$, мы будем подразумевать это граничное значение. Значения функции $E(m, R)$ известно лишь в некой области значений R вблизи критического значения R_c, определенного из (4). Нахождение функции $E(m, R)$ является важной нерешенной проблемой теории информации.

В настоящей работе мы вычислим эффекты конечного объема для модели Дерриды в случае полной связанности. Этот случай соответствует пределу $m \to 1/2$ в нашей терминологии или случаю сильного шума в теории информации. В этом случае известен $E(m, R)$ во всей области $0 < R < R_c$.

В нашем случае (кодирование с помощью модели Дерриды) у нас есть один свободный параметр, P. Как покажут результаты данной работы, при выборе $P = N/2$ поправки конечного объема соответствуют этому экстремальному значению $E(m, R)$.

Рассмотрим вместо (3) гамильтониан

$$H = - \sum_{1 \le i_1 \ldots < i_P = N} \left(J_0 N/C_N^P + j_{i_1 \ldots i_P} \sqrt{N/C_N^P} \right) \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_P}, \tag{7}$$

где $j_{i_1,\ldots,i_P}$ – случайные гауссовские константы с распределением

$$P(j_{i_1 \ldots i_P}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-(j_{i_1 \ldots i_P})^2]. \tag{8}$$

В [2] были вычислены эффекты конечного объема (при $J_0 = 0$) для спин-стекольной и парамагнитных фаз. Мы вычислим эффекты конечного объема, используя эту технику. Нам надо вычислить величину

$$< \ln Z(B, j) >_j, \tag{9}$$

где проводится усреднение по константе j. Система из N спинов имеет 2^N уровней энергии. Поэтому вместо (9) можно рассмотреть

$$\int \prod_{\alpha=1}^{2} dE_\alpha P(E_1...E_{2^N}) \ln \left[\sum_{\alpha=1}^{2^N} \exp(-BE_\alpha) \right]. \tag{10}$$

Таким образом, нам надо как-то вычислить функцию распределения $P(E_1...E_M)$ для M спиновых конфигураций. Обозначим $\{\sigma_i^1\}$ ферромагнитную конфигурацию с $\sigma_i^1 = 1$. Для этой конфигурации мы имеем

$$P(E_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left[-\frac{(E_1 + J_0 NB)^2}{N} \right]. \tag{11}$$

Для остальных конфигураций с δN перевернутыми спинами получаем выражение типа

$$P(E_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left[-\left(E_\alpha + \frac{J_0 A}{N} e^{-K\delta N} \right)^2 \right]. \tag{12}$$

Такое подавление второго слагаемого в экспоненте (12) по сравнению с аналогичным выражением в (11) связано с нашим удачным выбором $P = N/2$.

При вычислении $P(E_1...E_M)$ для $M \geq 2$ мы получим выражение типа

$$P(E_1...E_M) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left[-\frac{(E_1 + J_0 NB)^2}{N} \right] \times$$

$$\times \prod_{\alpha=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left(-\frac{E_\alpha^2}{N} \right) \exp\left[-J_0 \sum_{\alpha<\beta=1}^{N} C_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \right], \tag{13}$$

где

$$C_{\alpha\beta} \sim \sum_{1 \leq i_1 < i_2 ... < i_P \leq N} (\sigma_{i_1}^\alpha \sigma_{i_1}^\beta)...(\sigma_{i_P}^\alpha \sigma_{i_P}^\beta). \tag{14}$$

Для (14) мы опять имеем оценку

$$C_{\alpha\beta} \sim \exp(-K\delta N), \tag{15}$$

где K – некая комбинаторная константа. Давайте пренебрежем последним множителем в выражении (13). При вычислении свободной энергии это приближение приведет к некой экспоненциальной точности. Поскольку эффекты конечного объема, вычисленные факторизованным выражением для

$$P(E_1...E_M) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left[-\frac{(E_1 + J_0 NB)^2}{N} \right] \prod_{\alpha=2}^{M} \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left[-\frac{E_\alpha^2}{N} \right], \tag{16}$$

становится порядка единицы при стремлении к границе ферромагнитной фазы хотя при этих значениях J_0, близких к $J_0 = \sqrt{\ln 2}$, наши выражения корректны. Впрочем, совпадение экспоненты поправок с экстремально возможной $E(m, R)$ говорит в пользу того, что оно корректно во всей области $0 < R < R_c$.

Давайте использовать технику [2] для усреднения $< \ln Z >$:

$$< \ln Z >= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{< e^{-tZ} >}{t}\right] dt = \Gamma'(1) - \int_0^\infty \ln t d < e^{-tZ} > . \tag{17}$$

Здесь нам надо использовать выражение (16) для $P(E_1...E_M)$. Если бы мы имели в (16) только $P(E_1)$, из (17) получили бы

$$J_0 NB = \Gamma'(1) - \int_{-\infty}^{\infty} uf'(u + J_0 NB), \tag{18}$$

где

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dY \exp[-Y - \exp(u + \lambda Y)], \qquad \lambda = \sqrt{N}B.$$

Учет же остальных множителей в (16) приведет к выражению

$$< \ln Z(J,B)_j = J_0 NB - \int_{-\infty}^{\infty} f(u + J_o NB)[1 - f(u)^{2^N - 1}]. \tag{19}$$

Функция $f(u)$ монотонно убывает: от значения 1 в $-\infty$ превращается в нуль (с экспоненциальной точностью) для положительных значений u. Для $f(u)$ мы имеем разные асимптотические режимы:

$$0 < u, \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\Gamma(\frac{2u}{\lambda^2})| \exp(-\frac{u^2}{\lambda^2}), \tag{20}$$

$$\frac{-\lambda^2}{2} < u < 0, \quad f(u) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\Gamma(\frac{2u}{\lambda^2})| \exp(-\frac{u^2}{\lambda^2}), \tag{21}$$

$$-\lambda^2 < u < -\lambda^2/2, \qquad f(u) = 1 - \exp(u + \lambda^2/4). \tag{22}$$

Что касается функции $(1 - f(u)^{2^N - 1})$, то она ведет себя в области $u < 2\sqrt{N \ln 2}$ как

$$\exp[N \ln 2 - u^2/\lambda^2] \tag{23}$$

и как 1 при $u > 2\sqrt{N \ln 2}$.

При пренебрежении предэкспоненциальными множителями, нам достаточно рассмотреть выражение

$$\int_{-J_0 NB}^{-\sqrt{N \ln 2}B} \exp\left[-\frac{(u + J_0 NB)^2}{\lambda^2} + (\frac{N \ln 2 - u^2}{\lambda^2})\right] +$$

$$+ \int_{-\sqrt{N \ln 2}B}^{\infty} du \exp\left[-\frac{(u + J_0 NB)^2}{\lambda^2}\right]. \tag{24}$$

Вклад второго слагаемого в (24) всегда мал по сравнению с первым. Точка перевала для первого интеграла

$$u_0 = -J_0 N B/2. \tag{25}$$

Когда она лежит в отрезке интегрирования, то есть когда $J_0 > 2\sqrt{\ln 2}$, мы имеем для поправок свободной энергии

$$\exp[N[-(J_0)^2/2 + \ln 2]. \tag{26}$$

Когда же u_0 выпадает из отрезка интегрирования, $\sqrt{\ln 2} < J_0 < 2\sqrt{\ln 2}$, то имеем

$$\exp[-(J_0 - \sqrt{\ln 2})^2 N]. \tag{27}$$

Выражения (26), (27) совпадали с соответствующими режимами для $\exp[-E(m,R)N]$ в теории информации.

Какова ситуация в общем случае $m \neq 1/2$, покажут дальнейшие исследования.

Автор выражает глубокую благодарность Е.Арутюняну за консультации по теории информации, А.Аллахвердяну и Ш.Рухани за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант MVM000) и Министерства исследований и технологии ФРГ (грант 211-5291).

1. N.Sourlas, Nature **339**, 693 (1989).
2. B.Derrida, Phys. Rev. **24B**, 2613 (1981).
3. D.Gross and M.Mezard, Nucl. Phys. **B240**, 43 (1984).
4. И.Чисар, Я.Кушер, *Теория информации*, М.: Мир, 1985.
5. Д.Б.Саакян, Письма в ЖЭТФ, **55**, 198 (1992).
6. D.B.Saakyan, Phys. Lett. **A180**, 163 (1993).