Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.10, стр.825 - 829 © 1995г. 25 мая

МОЖЕТ ЛИ ВРАЩАТЬСЯ ТЯГОТЕЮЩАЯ СВЕРХТЕКУЧАЯ ЖИДКОСТЬ?

А.Ю.Андреев, Д.А.Киржниц, С.Н.Юдин

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 апреля 1995 г.

Выяснена неоднозначность ответа на вынесенный в заголовок вопрос. Вращение внешнего тела, увлекая конденсат вместе с инерциальной системой отсчета, ведет к образованию мениска (скорость $v_s^3 \neq 0$). Однако такое вращение конденсата не порождает сил Лензе–Тирринга и не дает вклада в момент системы (скорость $v_{s3} = 0$). В этом смысле конденсат, как и сверхтекучий ^{4}He при малой угловой скорости, вращаться не может.

Огромное время релаксации периода пульсара после сбоя говорит об аномально слабой связи коры и сердцевины пульсара и объясняется сверхтекучестью вещества последней при неявном предположении о достаточной слабости иных, отличных от вязкости механизмов такой связи [1]. К их числу относится воздействие на сердцевину сил типа Лензе–Тирринга [2,3], созданных вращением коры. Анализу этого механизма должно предшествовать решение более общего, выходящего за рамки физики пульсаров, вопроса о самой возможности вращения тяжелой сверхтекучей жидкости. Этот вопрос и обсуждается в данной заметке.

Для простоты в ней приняты следующие ограничения: стационарность задачи, осевая симметрия системы, медленность вращения (вихревых нитей нет), скалярность параметра порядка, нерелятивизм вещества (давление много меньше плотности энергии). Используются единицы $\hbar = c = 1$.

1. На первый взгляд поставленный вопрос вызывает противоречивые ответы. С одной стороны, для вращения жидкости необходима "удлиненность" (в смысле калибровочной теории) градиента параметра порядка в выражении для сверхтекучего тока. Так обстоит дело в сверхпроводнике в магнитном поле $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, где градиент $\nabla - ie\mathbf{A}$ "удлинен" и выполнено лондоновское соотношение ($\mathbf{v}_s$ – сверхтекучая скорость, e и m – заряд и масса)

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}_s = -e\mathbf{B}/m, \qquad \mathbf{v}_s = -e\mathbf{A}/m \qquad (\mathrm{div}\mathbf{A} = 0). \tag{1}$$

Напротив, в ^{4}He, где градиент "короткий", $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_s = 0$ и вращение невозможно [4]. Так же, казалось бы, ведет себя и тяжелая жидкость в поле тяготения: в общей теории относительности (ОТО) "удлинение" означает переход к ковариантной производной, совпадающей при действии на скалярный параметр порядка $\psi \propto \exp(i\alpha)$ с обычной производной. В самом деле [5], выражения для скалярных 4-тока и 4-скорости в ОТО

$$j_i \propto i[\partial_i\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\partial_i\psi], \qquad u_i = \partial_i\alpha, \tag{2}$$

прямо свидетельствуют о потенциальности течения.

2. Но с другой стороны, имеется далеко идущее подобие уравнений ОТО для слабого поля и электродинамики, проявляющееся для интересующих нас поперечных компонент полей при замене [6]

$$mg \rightleftharpoons e\mathbf{A}, \qquad e^2 \rightleftharpoons -4Gm^2, \tag{3}$$

где g – метрический тензор, $g_\alpha = -g_{0\alpha}$ $(\alpha = 1,2,3)$ – гравимагнитный потенциал (ГМП), G – постоянная Ньютона. В частности, существует аналог известного уравнения для $\mathbf{A}$ $(\kappa^2 = 16\pi G\rho$, ρ – плотность).

$$\Delta \mathbf{g} = \kappa^2 \mathbf{v}, \tag{4}$$

где справа стоит сумма сверхтекучего (s) и нормального (n) источников. С учетом вытекающего из (1), (3) соотношения [7]

$$\mathbf{v}_s = -\mathbf{g} \tag{1a}$$

получаются гравитационные аналоги уравнения Лондонов [4]

$$(\Delta + \kappa_s^2)\mathbf{g} = \kappa_n^2 \mathbf{v}_n \tag{4a}$$

и соответствующих эффектов электродинамики сверхпроводников – вращение конденсата за счет вращения нормального вещества (аналог лондоновского тока) и появление вторичного ГМП, вызванного вращением конденсата (аналог эффекта Мейсснера)[1)].

3. Возникшая противоречивая ситуация содержит неясности, относящиеся к смыслу вектора скорости (ко- или контравариантная компонента) и к фактическому превышению точности в (4a) (второе слагаемое в левой части дает член 2-го порядка по G). Разрешить эти неясности проще всего переходом к последовательному общерелятивистскому рассмотрению: в точных уравнениях ОТО малыми считаются лишь вращательные величины, а в качестве фоновой берется метрика Шварцшильда для неподвижного сферического тела [2]. В сферических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ с полярной осью по оси вращения отличны от нуля величины с пространственным индексом 3, причем зависимость от x^3 отсутствует. В частности, отлична от нуля контравариантная компонента 3-скорости [2]

$$v^3 = \dot{x}^3 h^{-1/2}, \qquad h = g_{00}, \tag{5}$$

равная для твердотельного вращения нормального вещества с угловой скоростью Ω $(x^3 = x_0^3 + \Omega t)$ величине

$$v_n^3 = \Omega h^{-1/2}. \tag{5a}$$

Введем компоненты 4-скорости [2]

$$u^i = (h^{-1/2}, 0, 0, v^3), \qquad u_i = (h^{1/2}, 0, 0, v_3) = g_{ik}u^k.$$

[1)] Обсуждаемое подобие нарушается "неправильным" знаком второго члена в левой части (4a) (это следствие знака "минус" в (3) – одноименные заряды, то есть массы, в гравитации притягиваются). Это проявляется в том, что вместо противотока электронов (правило Ленца) возникает увлечение конденсата, вместо аномального диамагнетизма появляется аномальный парамагнетизм (см. [8], гл. 9). Кроме того, спектр ротационных возбуждений приобретает тахионный характер $\omega^2 = k^2 - \kappa_s^2$, что могло бы привести к "самораскрутке" системы (ротационный аналог нестабильности Джинса).

Согласно (2) и сказанному выше

$$v_{s3} = g_{3k}u_s^k = d\alpha/dx^3 = 0. \tag{6}$$

Это ведет к обобщению (1а) на случай кривого пространства:

$$v_s^3 = -g^3 h^{-1/2}, \tag{1б}$$

где введена контравариантная компонента 3-вектора g_α:

$$g^3 = -g^{33}g_3 = g_{03}/g_{33}.$$

Таким образом, разрешение (по крайней мере, формальное) возникшего противоречия состоит в том, что конденсат неподвижен в смысле равенства нулю ковариантной компоненты 4-скорости (см. (6)) и вращается в смысле отличия от нуля ее контравариантной компоненты (см. (1б), (5)). Именно при $g_{03} \neq 0$, например, в поле вращающегося тела, одна из этих компонент может исчезнуть при отличии от нуля другой. Физический смысл всего сказанного раскрывается ниже.

4. Равенство (6) имеет ряд ярких следствий. Первое состоит в том, что источником ГМП служит вращение лишь нормальной, но не сверхтекучей компоненты: в уравнении Эйнштейна $R_{03} - \frac{1}{2}g_{03}R = \frac{1}{2}\kappa^2 u_0 u_3$ исчезает сверхтекучий источник. С учетом свойств решения Шварцшильда возникает следующее обобщение уравнения (4а) на случай кривого пространства:

$$\left[\beta\left(\partial_r^2 + \frac{4}{r}\partial_r\right) - \frac{1}{4}(\kappa_n^2 + \kappa_s^2)r\partial_r - \kappa_n^2\right] g^3 = \kappa_n^2\Omega, \tag{4б}$$

где

$$\beta = -g_{11}^{-1} = 1 - \frac{1}{2r}\int_0^r dr r^2(\kappa_n^2 + \kappa_n^2)$$

(сверхтекучий источник в правой части (4) скомпенсировался геометрическим членом, появившимся в левой части). Фактически конденсат, меняя метрику Шварцшильда, проявляет лишь свою массу, но не скорость. Поэтому на самом деле нет ни вторичного ГМП, ни аналога эффекта Мейсснера, ни (по нашим предварительным оценкам) тахионной нестабильности (см. сноску [1]).

Другое следствие (6) – отсутствие вклада конденсата в момент системы $\mathcal{M}$, который определяется асимптотикой ГМП вдали от тела [2]

$$g^3 \to -2G\mathcal{M}/r^3 .$$

Это видно и прямо из совпадения выражения $\mathcal{M}_s = -\partial s/\partial x^3$ (s – действие) с импульсом $p_{s3} = mv_{s3} = 0$.

Иллюстрацией сказанного служит задача о системе со сверхтекучей сердцевиной (масса M_s, радиус R) и с тонкой нормальной корой (масса M_n), причем плотности $\rho_{s,n}$ считаются постоянными. Постоянной оказывается и величина g^3 в сердцевине. В обозначениях $\lambda = r_g/R$, $r_g = 2GM$ и

$$\theta = (1-\sigma)/(1-\sigma/4), \qquad \sigma = [1 - \lambda_n/(1-\lambda_s)]^{1/2}$$

уравнение (4б) дает выражение для момента

$$\mathcal{M} = \theta R^3 \Omega / 2G$$

и для эффективной угловой скорости конденсата[2)]

$$\Omega_{eff}/\Omega = v_s^3/v_r^3 = g^3 = \theta.$$

В этих выражениях при $\lambda_n \ll \lambda_s$

$$\mathcal{M} = \frac{2}{3} M_n R^2 \Omega/(1-\lambda_s), \qquad \Omega_{eff}/\Omega = \frac{2}{3}\lambda_n/(1-\lambda_s),$$

знаменатель имеет чисто геометрический смысл (он связан с величиной β в (4б), входящей в выражение для лапласиана в кривом пространстве).

5. Отличие от нуля скорости (1б), не сказываясь на линейных по угловой скорости величинах – ГМП и моменте, проявляется во втором порядке по Ω в образовании мениска на свободной поверхности жидкости. Это следует из условия постоянства давления p вдоль поверхности и уравнения Бернулли (здесь $v^2 = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$)[3)]

$$v^2/2 + p/\epsilon + \chi = \mathrm{const}, \qquad h = 1 + 2\chi + \ldots \tag{7}$$

Оно выводится из уравнений гидродинамики ОТО [10]:

$$w u^k D_k u_i = (\partial_i - u_i u^k \partial_k) p, \qquad w = \epsilon + p, \quad d(w/\rho) = dp/\rho$$

в стационарном случае и при условии (6), имея в общем случае вид

$$hw/\rho\sqrt{1-v^2} = \mathrm{const}.$$

Для слабого поля, медленного вращения и нерелятивистской среды отсюда следует (7).

Сюда же примыкает вопрос о переходе к вращающейся с угловой скоростью ω вокруг той же оси системе отсчета (ей отвечают штрихованные величины). С учетом $x^3 = x^{3'} + \omega t'$, $t = t'$ имеем для метрического тензора

$$h' = h + \omega^2 g_{33}, \qquad g^{3'} = g^3 + \omega, \qquad g'_{33} = g_{33} = -r^2 \sin^2\theta. \tag{8}$$

Добавки к h соответствуют центробежному, а к g^3 – кориолисову ускорениям.

Для преобразования 4-скоростей находим

$$u^{0'} = h^{-1/2}, \qquad v^{3'} = v^3 - \omega h^{-1/2}; \qquad u'_0 = h^{1/2} + \omega v_3, \qquad v'_3 = v_3. \tag{9}$$

6. Приведенные в разд. 4, 5 утверждения можно пояснить ссылкой на увлечение массивным вращающимся телом инерциальной системы отсчета [3], в которой ускорение Лензе–Тирринга компенсируется ускорением Кориолиса, ведя к равенству $g^{3'} = 0$ (см. (8)). В такой системе согласно (1б), (8), (9), $v_s^{3'} = 0$ и одновременно $v'_{s3} = 0$. Поэтому с точки зрения скорости v_s^3 конденсат покоится в инерциальной системе, что и означает отсутствие динамических

[2)] При $M_s = 0$ величина Ω_{eff} оценивалась и ранее [3,9].

[3)] Величины $v_{s\alpha}$ (см. (6)) и $g_{\alpha\beta} v_s^\beta$ никоим образом нельзя путать: первая есть ковариантная компонента 4-вектора, вторая – 3-вектора.

проявлений вращения в самой этой системе. Фактически этот вывод относится ко всем системам отсчета: в любой из них, в силу последнего равенства (9), $v_{s3}=0$ (об отсутствии вклада в момент см., например, [11]).

К числу динамических проявлений, о которых только что говорилось, не относится мениск – эффект второго порядка по Ω. Дело в том, что в этом порядке рассматриваемая вращающаяся система уже не инерциальна: можно показать, что ускорение типа Лензе–Тирринга второго порядка по Ω не может скомпенсировать центробежное ускорение, имея тот же знак, что и второе слагаемое в h' (см. (8)).

Мы благодарны В.Л.Гинзбургу и участникам руководимого им семинара, особенно В.С.Бескину, В.Б.Брагинскому, а также Г.С.Бисноватому-Когану и Д.М.Седракяну за полезные дискуссии.

---

1. Р.Н.Манчестер, Дж.Х.Тейлор, *Пульсары*, М.: Мир, 1980.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1988.
3. С.Вейнберг, *Гравитация и космология*, М.: Мир, 1975.
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Статистическая физика*, ч.II, М.: Наука, 1978.
5. А.А.Гриб, С.Г.Мамаев, В.М.Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, М.: Атомиздат, 1980.
6. К.Меллер, *Теория относительности*, М.: Мир, 1975.
7. B.S. de Witt, Phys. Rev. Lett. **16**, 1092 (1966).
8. *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости* (под ред. В.Л.Гинзбурга и Д.А.Киржница), М.: Наука, 1977.
9. J.M.Cohen, In: *Relativity Theory a. Astrophysics. I*, Ed. J.Ehlers, 1967, p.200.
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
11. *Черные дыры, мембранный подход* (под ред. К.Торна, Р.Прайса, Д.Макдоналда) М.: Мир, 1988.