

## КВАНТОВЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО БАЛАНСНОГО КОМПАРАТОРА

Т.В.Филиппов<sup>1)</sup>

*Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного  
университета и.м. М.В.Ломоносова  
119899 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 апреля 1995 г.

Исследуются квантовые диссипативные свойства джозефсоновского балансного компаратора: системы двух шунтированных переходов в сверхпроводящем кольце. Квантовая динамика обобщенной координаты системы (разностная фаза двух переходов) рассматривается с учетом затухания в рамках модели Калдейры-Леггетта [5] и конечной скорости изменения внешнего магнитного потока. Исследуется температурная зависимость параметра  $\Delta I_c$ , характеризующего воздействие флуктуаций на систему. На основании сравнения теоретических расчетов с результатами эксперимента делается вывод о квантовом характере величины параметра  $\Delta I_c$ .

Существуют убедительные экспериментальные доказательства существования *вторичных квантовых* эффектов, таких как макроскопическое квантовое туннелирование и квантование энергетического спектра [1], в системах на основе эффекта Джозефсона. При этом джозефсоновские системы являются принципиально *диссипативными*, что существенным образом усложняет и ограничивает возможность экспериментального наблюдения вторичных квантовых эффектов, включая макроскопическую квантовую когерентность.

В этой связи представляет интерес анализ диссипативных свойств конкретной джозефсоновской системы, так называемого балансного компаратора [2]. В эксперименте [3] исследовалась температурная зависимость вероятности переключения компаратора, обусловленная внутренними флуктуациями его образующих переходов. В данной работе показано, что полученные в [3] экспериментальные данные не могут быть объяснены в рамках существующей теории [4] и требуют учета вклада квантовых флуктуаций при расчете вероятности переключения компаратора. Тем самым теоретически и экспериментально [3] доказана возможность практической реализации устройства с токовой характеристикой на уровне квантовых флуктуаций.

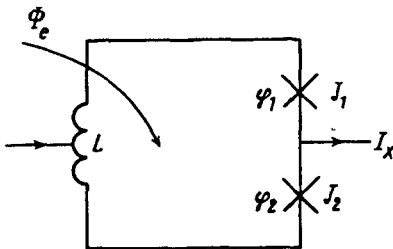


Рис.1. Балансный компаратор: система двух джозефсоновских переходов в сверхпроводящем кольце

На рис.1 приведена упрощенная принципиальная схема компаратора, образованного двумя джозефсоновскими переходами  $J_1$  и  $J_2$ . Поясним принцип

<sup>1)</sup>e-mail: tfil@rsfq.npi.msu.su

действия такой системы. В среднюю точку компаратора подается ток  $I_x$ , а внешний магнитный поток  $\Phi_e$  наводит в контуре круговой ток  $I_e$ . Если суммарный ток  $I_e + I_x$  через один из переходов превышает его критическое значение, то это ведет к изменению джозефсоновской разности фаз на этом переходе на величину, кратную  $2\pi$ .

Зависимость вероятности переключения, например, перехода  $J_2$  от тока  $I_x$  без учета внутренних флуктуаций в переходах имеет вид вертикальной ступеньки. Учет флуктуаций ведет к размытию ступеньки, величину которого можно характеризовать параметром

$$\Delta I_x = |dP_2/dI_x|^{-1}, \quad I_x = 0. \quad (1)$$

Целью настоящей работы является расчет величины параметра  $\Delta I_x$  на основе анализа квантовой динамики балансного компаратора в рамках модели Калдейры-Леггетта [5].

Пусть каждый из переходов на рис.1 имеет критический ток  $I_c$ , емкость  $C$  и шунтирован извне нормальным металлическим проводником с сопротивлением  $R$ . При выполнении условия

$$I_c R \ll \Delta(T)/e, \quad (2)$$

где  $\Delta(T)$  – энергетическая щель использованных сверхпроводников, классическая динамика таких переходов хорошо описывается резистивной моделью [6], а квантовомеханические свойства – моделью Калдейры-Леггетта [5]. В последней модели диссипация есть результат взаимодействия макроскопической переменной системы с ансамблем гармонических осцилляторов, образующих равновесный термостат.

Если величина индуктивности кольца  $L$  достаточно мала ( $\pi I_c L / \Phi_0 \ll 1$ , где  $\Phi_0 = h/2e$  – квант магнитного потока), то связь между внешним магнитным потоком  $2\varphi_e(t) = 2\pi\Phi_e(t)/\Phi_0$  и суммарной фазой на компараторе можно считать линейной [4]. Это позволяет считать суммарную фазу  $2\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2$  фиксированной и ограничиться рассмотрением одномерной задачи динамики разностной фазы  $2\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Запишем выражение для потенциальной энергии системы [6]:

$$U(\varphi)/2E_c = -\cos[\varphi_e(t)] \cos[\varphi] - i_x \varphi, \quad (3)$$

$$E_c = \Phi_0 I_c / 2\pi, \quad i_x = I_x / 2I_c.$$

Легко видеть, что нарастание фазы  $\varphi_e(t)$  во времени ведет к инвертированию потенциальной энергии. Обсудим качественно динамику системы в случае мгновенного инвертирования энергии. Если в начальный момент времени волновой пакет локализован в минимуме потенциала, то после инвертирования пакет стремится уйти из неустойчивого положения вблизи максимума в ближайший локальный минимум. При этом направление движения, в отсутствие флуктуаций, определяется знаком  $i_x$ . Наличие флуктуаций приводит к конечной вероятности для пакета изменить направление движения.

Влияние флуктуаций наиболее существенно вблизи максимума потенциала, поэтому линеаризуем (3) по  $\varphi$  при  $\varphi \approx 0$ :

$$\tilde{U}(\varphi)/2E_c \simeq \mu(t)\varphi^2/2 - i_x\varphi, \quad (4)$$

а закон изменения во времени  $\cos[\varphi_e(t)]$  выбираем в виде

$$\cos[\varphi_e(t)] \equiv \mu(t) = (\mu_1 + \mu_2) \exp(-2\kappa t) - \mu_2, \quad (5)$$

$$\mu_1 \equiv \cos[\varphi_e(0)], \quad \mu_2 \equiv |\cos[\varphi_e(\infty)]|,$$

где параметр  $\kappa/\omega_0$  характеризует скорость изменения потенциальной энергии системы.

Нас интересует вероятность  $P_2$  обнаружить систему после инвертирования в левом локальном минимуме

$$P_2 = \int_{-\infty}^0 \rho(x, x, t) dx, \quad x \equiv \varphi, \quad (6)$$

что соответствует переключению нижнего перехода  $J_2$  на рис.1. В этом выражении  $\rho(x, x, t)$  - диагональный элемент матрицы плотности системы.

Матрица плотности при  $t > 0$ , усредненная по степеням свободы термостата, в координатном  $\eta - \xi$  представлении ( $\eta = x + y, \xi = x - y$ ), связана с начальной ( $t = 0$ ) линейным образом [5]:

$$\rho(\eta, \xi, t) = (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_i d\xi_i J(\eta, \xi, t; \eta_i, \xi_i, 0) \rho(\eta_i, \xi_i, 0). \quad (7)$$

Начальную матрицу плотности выбираем в виде

$$\rho(\eta_i, \xi_i, 0) = \frac{1}{(4\pi\sigma_{xi}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\eta_i - 2x_i)^2}{16\sigma_{xi}^2} - \beta\gamma_Q^{-2}\sigma_{vi}^2\xi_i^2\right) \quad (8)$$

как результат преобразования Вигнера [7] от классического распределения Гиббса с обобщенными на квантовый случай выражениями для дисперсий по координате и скорости:

$$\sigma_{xi}^2 = \frac{\gamma_Q}{2\pi\beta^{1/2}} \int_0^{\Omega/\omega_0} d\epsilon \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\epsilon\right) \frac{\epsilon}{(\mu_1 - \epsilon^2)^2 + \beta^{-1}\epsilon^2}, \quad (9)$$

$$\sigma_{vi}^2 = \frac{\gamma_Q}{2\pi\beta^{3/2}} \int_0^{\Omega/\omega_0} d\epsilon \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\epsilon\right) \frac{\epsilon^3}{(\mu_1 - \epsilon^2)^2 + \beta^{-1}\epsilon^2},$$

$$\beta = (\omega_c/\omega_0)^2, \quad \omega_c = 2\pi I_c R/\Phi_0, \quad \omega_0^2 = 2\pi I_c/\Phi_0 C,$$

$$\gamma_Q = \hbar\omega_0/2E_c, \quad x_i = i_x/\mu_1, \quad v = \omega_c^{-1} dx/dt.$$

Здесь  $\Omega (\gg \omega_0)$  - максимальная частота в распределении осцилляторов, образующих термостат [5],  $T$  - температура термостата,  $k$  - постоянная Больцмана.

Пропагатор  $J(\eta, \xi, t; \eta_i, \xi_i, 0)$  системы легко найти по общей схеме, предложенной Калдейрой и Леггеттом [5]. При этом оказывается, что диагональный элемент матрицы плотности при  $t > 0$  можно записать в простом виде:

$$\rho(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi\sigma_x^2)^{1/2}} \exp - \left( \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4\sigma_x^2} \right), \quad (10)$$

где средняя координата  $\langle x \rangle$  и дисперсия  $\sigma_x^2$  даются соотношениями

$$\langle x \rangle = (x_i K + Q) / N, \quad (11)$$

$$\sigma_x^2 = (\beta \gamma_Q^{-2} \sigma_{z_i}^2 + 4\sigma_{z_i}^2 K^2 + C) / 4N^2, \quad (12)$$

$$K = (2\gamma_Q)^{-1} [\kappa/\omega_0 \int_0^{z_0} G^{-1}(z_0, z) dG(z_0, z)/dz_0 + 1/2\beta^{1/2}],$$

$$N = \sin(\nu\pi) / \pi \kappa/\omega_0 \gamma_Q^{-1} G^{-1}(z_0, z) (z_0/z)^\delta,$$

$$Q = 1/2 i_x \gamma_Q^{-1} \omega_0/\kappa G^{-1}(z_0, z) z_0^\delta \int_x^{z_0} G^{-1}(\theta, z) \theta^{-\delta-1} d\theta,$$

$$C = (2\pi\gamma_Q\beta^{1/2})^{-1} \int_0^{\Omega/\omega_0} d\epsilon \epsilon \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\epsilon\right) C_\epsilon,$$

$$C_\epsilon = (\omega_0/\kappa)^2 z_0^{2\delta} G^{-1}(z_0, z) \int_x^{z_0} \int_x^{z_0} d\theta_1 d\theta_2 G(\theta_1, z) G(\theta_2, z) W_\epsilon(\theta_1, \theta_2),$$

$$W_\epsilon(\theta_1, \theta_2) = \text{Re}[\theta_1^{-\delta-i\omega_0\epsilon/\kappa-1} \theta_1^{-\delta+i\omega_0\epsilon/\kappa-1}],$$

$$G(\theta_1, \theta_2) = J_\nu(\theta_1) J_{-\nu}(\theta_2) - J_{-\nu}(\theta_1) J_\nu(\theta_2),$$

$$z = z_0 \exp(-\kappa t), \quad z_0^2 = (\mu_1 + \mu_2) / (\kappa/\omega_0)^2, \quad \delta = 1/2\beta^{1/2} (\kappa/\omega_0),$$

где  $J_\nu(z)$ ,  $J_{-\nu}(z)$  - функции Бесселя [8] нецелого индекса

$$\nu = \frac{(1/4\beta + \mu_2)^{1/2}}{\kappa/\omega_0} \quad (13)$$

Легко показать, что в инвертированном потенциале диагональный элемент матрицы плотности  $\rho(x, x, t)$  представляет собой расплывающийся пакет, направление движения которого определяется знаком  $i_x$ . Для этого выпишем асимптотические выражения для средней координаты  $\langle x \rangle$  и дисперсии  $\sigma_x^2$  на временах, когда координата частицы достигает значения порядка единицы:

$$\langle x \rangle = \pi/2 \sin(\nu\pi) (z/z_0)^\delta J_{-\nu}(z) i_x (X_1 + X_2), \quad (14)$$

$$X_1 = \frac{z_0 dJ_\nu(z_0)/dz_0 + \delta J_\nu(z_0)}{(\kappa/\omega_0)^2 (z_0^2 + \delta^2 - \nu^2)}, \quad X_2 = z_0^\delta (\omega_0/\kappa)^2 \int_0^{z_0} d\theta J_\nu(\theta) \theta^{-\delta-1},$$

$$\sigma_x^2 = (\pi/2 \sin(\nu\pi))^2 (z/z_0)^{2\delta} J_{-\nu}^2(z) (\Sigma_1 + \Sigma_2), \quad (15)$$

$$\Sigma_1 = (\omega_0/\kappa)^2 \beta \sigma_{xi}^2 J_\nu^2(z_0) + \sigma_{xi}^2 (\delta J_\nu(z_0) + z_0 dJ_\nu(z_0)/dz_0)^2,$$

$$\Sigma_2 = \frac{z_0^{2\delta} \gamma Q}{2\pi (\kappa/\omega_0)^4 \beta^{1/2}} \int_0^{\Omega/\omega_0} d\epsilon \epsilon \coth\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \epsilon\right) \int_0^{z_0} \int_0^{z_0} d\theta_1 d\theta_2 J_\nu(\theta_1) J_\nu(\theta_2) W_\epsilon(\theta_1, \theta_2).$$

С учетом определения (6) вероятности  $P_2$  обнаружить систему после инвертирования в левом локальном минимуме, для параметра  $\Delta I_x$  имеем

$$\Delta i_x \equiv \frac{\Delta I_x}{2I_c} = \left| \frac{(4\pi(\Sigma_1 + \Sigma_2))^{1/2}}{X_1 + X_2} \right|. \quad (16)$$

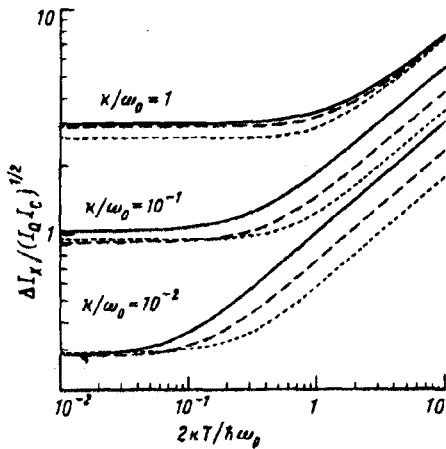


Рис.2. Температурная зависимость параметра  $\Delta I_x$  для различных значений затухания в системе  $\beta = 1$  (—),  $10$  (- - -),  $100$  (...) при  $\Omega/\omega_0 = 50$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$

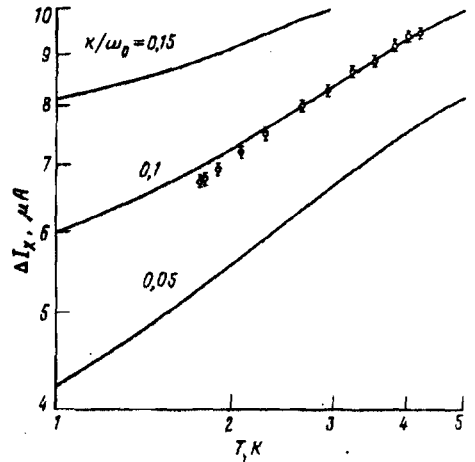


Рис.3. Сравнение экспериментальных данных [2] температурной зависимости параметра  $\Delta I_x$  с теорией

На рис.2 приведены температурные зависимости параметра  $\Delta I_x$  для различных величин скорости  $\kappa/\omega_0$  изменения потенциальной энергии и затухания

$\beta$  в системе. Параметр  $\Delta I_x$  нормирован на величину  $(I_Q I_c)^{1/2}$ , где ток  $I_Q = (2\pi/\Phi_0)\hbar\omega_0/2$  характеризует квантовые флуктуации по аналогии с величиной "теплового тока" [6]  $I_T = (2\pi/\Phi_0)kT$ .

В пределе высоких температур  $kT \gg \hbar\omega_0$  ( $I_T \gg I_Q$ ) выражение для параметра  $\Delta I_x$  совпадает с полученным ранее [4] на основе решения классического уравнения Фоккера-Планка.

В работе [3] исследовалась температурная зависимость параметра  $\Delta I_x$ . В схеме компаратора использовались шунтированные джозефсоновские переходы с параметрами  $I(4, 2\text{ K}) = 145$  мкА,  $C = 0,47$  пФ,  $R=2$  Ом. Безразмерная индуктивность  $\pi I_c L/\Phi_0$  имела величину порядка 0.1. Моделирование эквивалентной схемы с помощью программного комплекса PSCAN [9] показало, что скорость изменения потенциала  $\kappa/\omega_0$  лежит в диапазоне от 0,05 до 0,15, а параметры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  имеют значение 0,975.

Важно подчеркнуть, что в области рабочих температур ток  $I_Q$  имел величину порядка  $I_T$  ( $\hbar\omega_0/2kT \approx 1$ ). Поэтому при анализе экспериментальных данных нельзя ограничиться рассмотрением теплового шума. Необходимо учесть вклад квантовых флуктуаций в вероятность переключения компаратора.

На рис.3 приведены экспериментальные точки и теоретические кривые для различных значений параметра  $\kappa/\omega_0$  с учетом выражения Амбегаокара-Баратова [10] для зависимости критического тока перехода от температуры (критическая температура использованных сверхпроводников составляла 8,8 К). Наблюдается хорошее согласие между теорией и экспериментом при  $\kappa/\omega_0 = 0, 1$ . К сожалению, диапазон изменения температуры не позволяет говорить о выходе величины параметра  $\Delta I_x$  на плато, характерного для квантового предела. Этот вопрос требует дополнительного экспериментального исследования.

Проведенный теоретический анализ системы позволяет спланировать ряд конкретных физических экспериментов. При этом, помимо температурной зависимости  $\Delta I_x$  с выходом на плато, определяемом квантовыми флуктуациями, представляет интерес зависимость  $\Delta I_x$  от скорости  $\kappa/\omega_0$  изменения внешнего магнитного потока.

Работа поддерживалась Международным Научным Фондом, грант MDP000 и Научным Советом научно-технической программы "Актуальные проблемы физики конденсированного состояния".

Автор благодарен К.К.Лихареву за полезные обсуждения в ходе выполнения настоящей работы.

- 
1. *Quantum tunnelling in condensed media*, Eds. by Yu.Kagan, A.J.Leggett, Elsevier Science Publishers B.V., (1992).
  2. V.K.Kornev and V.K.Semenov, *Extended abstracts of intern. superconductive electronics conf. (ISEC'87)*, Tokyo, Japan, 131, (1987).
  3. T.V.Filippov, Yu.A.Polyakov, V.K.Semenov, and K.K.Likharev, будет опубликовано в *IEEE Trans. Magn.* (1995).
  4. T.V.Filippov and V.K.Kornev, *IEEE Trans.Magn.* 27,
  5. A.O.Caldeira and A.J.Leggett, *Physica A* 121, 587 (1983). 2452 (1991).
  6. К.К.Лихарев, *Введение в динамику джозефсоновских переходов*. М.: Наука, (1985).
  7. Р.Фейнман, *Статистическая механика*. М.: Мир, (1975).
  8. Е.Янке, Ф.Энде, Ф.Леш, *Специальные функции*. М.: Наука, (1968).
  9. S.V.Polonsky, V.K.Semenov, and P.N.Shevchenko, *Supercond. Sci. Technol.* 4, 667, (1991).
  10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Статистическая физика*. М.: Наука, (1964).