

## ТРИКРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА В МОДЕЛИ ГРОССА-НЕВЬЕ С ХИМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ И НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ ПРОСТРАНСТВА

А.С.Вшивцев, К.Г.Клименко\*, Б.В.Магницкий

*Московский институт радиотехники, электроники и автоматики  
117454 Москва, Россия*

\*Институт физики высоких энергий  
142284 Протвино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 10 апреля 1995 г.

Исследована фазовая структура модели Гросса-Невье на пространстве с топологией  $R^1 \times S^1$  и химическим потенциалом  $\mu$ . Показано, что в плоскости параметров  $(\mu, 1/L)$ , где  $L$  - длина окружности  $S^1$ , существует трикритическая точка, в которой сходятся границы трех различных фаз.

Известно, что единая теория всех сил природы, включая гравитационные, еще далека от завершения. Вот почему значительное внимание физиков обращено на развитие квантовых теорий поля в пространствах с нетривиальной метрикой и топологией [1]. В рамках этого подхода уже обсуждалась связь между спонтанным нарушением симметрии и кривизной пространства, а также его топологией [2]. В предлагаемой работе рассматривается совместное влияние таких факторов, как ненулевая плотность числа частиц и нетривиальная топология пространства-времени на структуру вакуума в квантовой теории поля.

В качестве основы для изучения этого явления мы взяли двумерную модель Гросса-Невье (ГН) [3], лагранжиан которой можно представить в виде

$$L = \sum_k [\bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k] - N\sigma^2 / (2g), \quad (1)$$

где  $\hat{\psi}_k$  - двухкомпонентный спинор Дирака для каждого фиксированного значения  $k = 1, \dots, N$ . (На уравнениях движения  $\sigma = \Sigma \bar{\psi}_k \psi_k$ , и (1) эквивалентен широко известному лагранжиану с четырехфермионным взаимодействием [3].) Лагранжиан (1) симметричен относительно дискретного кирального преобразования  $\sigma \rightarrow -\sigma$ ,  $\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k$ . Модель привлекательна тем, что целым рядом свойств (асимптотической свободой, спонтанным нарушением киральной инвариантности и др.) напоминает квантовую хромодинамику и, кроме того, может быть использована для описания квазиодномерных проводящих соединений, получивших название пайерлсовских диэлектриков [4]. Недавно в работах [5] эта теория поля исследовалась в двумерном пространстве-времени с топологией  $R^1 \times S^1$  (здесь компактифицирована пространственная координатная ось, а окружность  $S^1$  имеет длину  $L$ ). В отличие от [5] мы рассматриваем фазовую структуру ГН модели на пространстве  $R^1 \times S^1$  в зависимости от двух внешних параметров - длины окружности  $L$  и химического потенциала  $\mu \geq 0$ .

Для начала напомним, что эффективный потенциал модели при  $\mu, \lambda = 0$  ( $\lambda \equiv 1/L$ ) в главном порядке  $1/L$  разложения имеет вид [3, 6]

$$V_0(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g} + \frac{iN}{(2\pi)^2} \int d^2p \ln(\sigma^2 - p^2) = \frac{N\sigma^2}{4\pi} [2\ln(\sigma/M) - 1]. \quad (2)$$

В (2) и ниже мы предполагаем, что  $\sigma \geq 0$ . Кроме того, в (2) отражено еще одно свойство модели ГН – явление размерной трансмутации. При этом вместо безразмерной константы связи  $g$  независимым параметром модели становится размерная величина  $M$ , физический смысл которой – масса фермионов.

При  $\mu \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  эффективный потенциал есть [7]

$$V_\mu(\sigma) = V_0(\sigma) - \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \Theta(\mu - \sqrt{\sigma^2 + p_1^2})(\mu - \sqrt{\sigma^2 + p_1^2}), \quad (3)$$

где  $\Theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$ ,  $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$ . Наконец, при  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu = 0$  и в случае, когда поля удовлетворяют периодическим граничным условиям, то есть  $\psi_k(x+L) = \psi_k(x)$ ,  $\sigma(x+L) = \sigma(x)$ , эффективный потенциал имеет вид [5]

$$V_L(\sigma) = V_0(\sigma) - \frac{N}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \ln[1 - \exp(-L\sqrt{\sigma^2 + p_0^2})]. \quad (4)$$

В рамках данной статьи мы ограничимся рассмотрением только периодических граничных условий на поля, хотя можно исследовать ГН модель и с антипериодическими, а также условиями более общего вида [5]. Глобальный минимум функции (4) находится в точке  $\sigma_0(\lambda)$ , которая при  $\lambda \rightarrow 0$  есть  $\sigma_0(0) = M$ , а при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\sigma_0(\lambda) \sim \pi\lambda / \ln(\lambda/\lambda_0), \quad (5)$$

где  $4\pi\lambda_0 = M \exp(\gamma)$ ,  $\gamma = 0,577\dots$  – постоянная Эйлера.

Пусть  $\mu, \lambda \neq 0$ , а поля  $\psi, \sigma$  удовлетворяет периодическим граничным условиям. В этом случае для того, чтобы получить эффективный потенциал в главном порядке  $1/N$  разложения, достаточно в формулах (2), (3) интегрирование по переменной  $p_1$  заменить на суммирование по дискретным значениям  $p_{1n} = 2\pi\lambda n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В результате получим

$$V_{\mu L}(\sigma) = V_L(\sigma) - N\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(\mu - \sqrt{\sigma^2 + (2\pi n\lambda)^2})(\mu - \sqrt{\sigma^2 + (2\pi n\lambda)^2}). \quad (6)$$

Ограничимся теперь только такими значениями  $\mu$  и  $\lambda$ , для которых  $(\mu, \lambda) \in \Omega$ , где

$$\Omega = \{(\mu, \lambda) : 0 \leq \mu \leq 2\pi\lambda\}. \quad (7)$$

В этом случае вклад в выражение (6) дают только  $V_L(\sigma)$  и член суммы, соответствующий  $n = 0$ , а уравнение стационарности для функции (6) по аналогии с [5] имеет вид

$$\frac{dV_{\mu L}(\sigma)}{d\sigma} = 0 = \frac{N\sigma}{\pi} \{ \ln(\lambda/\lambda_0) + I(\sigma) - \frac{\pi\lambda}{\sigma} [\Theta(\mu - \sigma) - 1] \}, \quad (8)$$

где

$$I(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ 1/n - [n^2 + (\sigma/2\pi\lambda)^2]^{-1/2} \}. \quad (9)$$

Отсюда видно, что при  $\lambda > \lambda_0$  у функции (6) есть две стационарные точки:  $\sigma_1 = 0$  и  $\sigma_2 = \sigma_0(\lambda)$ , где  $\sigma_0(\lambda)$  – точка глобального минимума функции (4) (см.(5)). Рассмотрим уравнение

$$V_{\mu L}(0) = V_{\mu L}(\sigma_0(\lambda)), \quad (10)$$

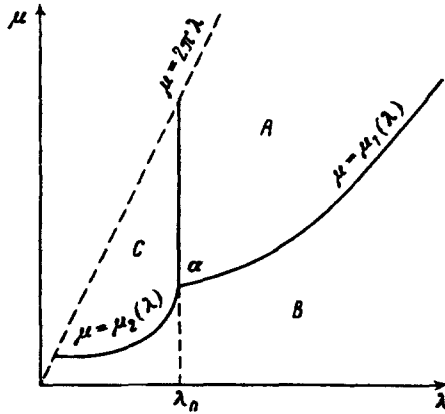
которое задает критическую кривую  $\mu = \mu_1(\lambda)$ . Ясно, что при  $\mu > \mu_1(\lambda)$  и  $\lambda > \lambda_0$  находятся точки, соответствующие безмассовой кирально инвариантной фазе А. Здесь  $\sigma_1 = 0$  является глобальным минимумом потенциала  $V_{\mu L}(\sigma)$ . Если  $\mu < \mu_1(\lambda)$  и  $\lambda > \lambda_0$ , то глобальный минимум потенциала находится в  $\sigma_2 = \sigma_0(\lambda)$ . Этим точкам области  $\Omega$  соответствует массивная фаза В, в которой киральная инвариантность исходной модели спонтанно нарушена (см. рисунок). Поскольку при пересечении кривой  $\mu = \mu_1(\lambda)$  параметр порядка (то есть положение глобального минимума функции  $V_{\mu L}(\sigma)$ ) скачком меняет свое значение, то она является кривой фазовых переходов первого рода. Из (6)–(10) следует, что

$$\mu_1(\lambda) = [V_L(0) - V_L(\sigma_0(\lambda))]/(N\lambda). \quad (11)$$

Отсюда нетрудно получить, что при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\mu_1(\lambda) \approx (\gamma + 1)\sigma_0(\lambda)/2 \approx \frac{(\gamma + 1)\pi\lambda}{2 \ln(\lambda/\lambda_0)}. \quad (12)$$

Кроме того, вычисления на компьютере показывают, что  $\mu_1(\lambda_0) \approx (0, 32\dots)2\pi\lambda_0$ , то есть кривая  $\mu_1(\lambda)$  пересекает линию  $\lambda = \lambda_0$  в точке  $\alpha$  (см. рисунок), принадлежащей области  $\Omega$ .



Пусть  $\lambda < \lambda_0$ . В этом случае уравнение стационарности (8), кроме  $\sigma_{1,2}$ , будет иметь еще одно решение:  $\sigma_3 = \bar{\sigma}_0(\lambda)$ , которое при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  представим в виде

$$\bar{\sigma}_0(\lambda) \approx [8(\lambda_0 - \lambda)\lambda_0\pi^2/\zeta(3)]^{1/2}, \quad (13)$$

где  $\zeta(3) = 1, 202\dots$ . Очевидно, что в точке  $\sigma_1 = 0$  потенциал имеет локальный максимум, поэтому его глобальный минимум располагается или в точке  $\bar{\sigma}_0(\lambda)$  или в  $\sigma_0(\lambda)$  в зависимости от того, выше или ниже кривой

$$\mu_2(\lambda) = [V_L(\bar{\sigma}_0(\lambda)) - V_L(\sigma_0(\lambda))]/(N\lambda) \quad (14)$$

мы находимся. При  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  кривая  $\mu_2(\lambda)$  упирается в точку  $\alpha$ , где

$$\mu_2(\lambda) \approx \mu_1(\lambda_0) - \bar{\sigma}_0(\lambda). \quad (15)$$

При пересечении кривой  $\mu_1(\lambda)$  координата глобального минимума потенциала скачком меняет свое значение, поэтому здесь происходит фазовый переход первого рода из массивной фазы  $B$  в массивную фазу  $C$  теории. Все точки области  $\Omega$ , лежащие выше  $\mu_2(\lambda)$  и левее прямой  $\lambda = \lambda_0$ , соответствуют этой новой фазе (см. рисунок). Необходимо также отметить, что на линии  $\lambda = \lambda_0$  выше точки  $\alpha$  происходит фазовый переход второго рода из фазы  $C$  в фазу  $A$ . Дело в том, что здесь  $\tilde{\sigma}_0(\lambda)$  обращается в нуль, то есть параметр порядка непрерывен на границе раздела фаз.

Таким образом, мы показали, что в главном порядке  $1/N$  разложения в модели Гросса–Невье на пространстве  $R^1 \times S^1$  с химическим потенциалом существует трикритическая точка  $\alpha$ , в которой соприкасаются три фазы – две массивные и одна безмассовая (см. рисунок). Из точки  $\alpha$  выходят три критические кривые. Две из них являются кривыми фазовых переходов первого рода, при пересечении которых скачком меняются не только массы фермионов, но и плотности энергий основного состояния. Третья – кривая фазовых переходов второго рода.

Авторы признательны М.М.Губаевой за помощь в вычислениях на компьютере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-02-03704-а).

- 
1. Н.Биррелл, П.Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, М.: Мир, 1984.
  2. D.J.Toms, Phys. Rev. **D21**, 2805 (1980); G.Kennedy, Phys. Rev. **D23**, 2884 (1981); M.Burgess and D.J.Toms, Ann. Phys. **210**, 438 (1991); E.Elizalde and K.Kirsten, J. Math. Phys. **35**, 1260 (1994).
  3. D.J.Gross and A.Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3235 (1974).
  4. И.В.Криве, А.С.Рожавский, УФН **152**, 33 (1987).
  5. S.K.Kim, W.Namgung, K.S.Soh, and J.H.Yee, Phys. Rev. **D36**, 3172 (1987); D.Y.Song and J.K.Kim, Phys. Rev. **D41**, 3165 (1990); F.Ravndal and C.Wotzasek, Phys. Lett. **B249**, 266 (1990); S.Huang and B.Schreiber, Nucl. Phys. **B426**, 644 (1994).
  6. K.G.Klimenko, Z. Phys. **C60**, 677 (1993).
  7. В.А.Осипов, В.К.Федянин, ТМФ **73**, 393 (1987); К.Г.Клименко, ТМФ **75**, 226 (1988).