Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.11, стр.898 - 902

ЛОКАЛЬНЫЕ МОДЫ И РАССЕЯНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН НА СОЛИТОНЕ В ДВУМЕРНОМ ИЗОТРОПНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Б.А.Иванов

Институт металлофизики НАН Украины

252142 Киев, Украина

Поступила в редакцию 4 апреля 1995 г.

В двумерном изотропном ферромагнетике солитон Белавина–Полякова с топологическим зарядом ν обладает $2|\nu|$ локальными магнонными модами с нулевой частотой. Эти моды являются предельными точками парциальных цилиндрических волн с азимутальным числом $-|\nu| < m \leq |\nu|$ при $k \to 0$.

1. Известно, что солитоны играют особую роль в термодинамике одно- и двумерных (1D и 2D) нелинейных моделей упорядоченных сред, в частности, магнетиков. Локальные моды (ЛМ), особенно нулевые, весьма существенны при построении солитонной термодинамики, см. [1-3]. Например, в методе солитонной феноменологии [4] ЛМ определяют температурную зависимость плотности 1D-солитонов. Кроме того, резонанс на ЛМ может непосредственно наблюдаться экспериментально [5,6].

Для 1D-магнетиков известен ряд точных решений, описывающих как солитоны, так и ЛМ на их фоне. Для физически интересных моделей 2D-магнетиков известно только точное решение Белавина–Полякова [7], описывающее π_2-топологический солитон в ферромагнетике (ФМ) с энергией вида

$$W = A\int(\partial \mathrm{m}/\partial x_i)^2 d^2x, \tag{1}$$

где A – обменная константа, $\mathrm{m} = \mathrm{M}/M_0$ – единичный вектор, определяющий намагниченность M, $M_0 = |\mathrm{M}|$. Спектр магнонов в присутствии солитона не исследовался.

Мы покажем, что для уравнения Ландау–Лифшица, описывающего ФМ с энергией (1), может быть проведено полное решение задачи рассеяния спиновой волны на солитоне и проанализированы ЛМ.

2. Для анализа малых колебаний намагниченности удобно ввести вращающуюся систему ортов e_1, e_2, e_3, где $\mathrm{e}_3 = \mathrm{e}_z\cos\theta + \sin\theta(\mathrm{e}_x\cos\varphi + \mathrm{e}_y\sin\varphi)$ совпадает с m в солитоне, $\mathrm{e}_2 = -\mathrm{e}_x\sin\varphi + \mathrm{e}_y\cos\varphi$, $\mathrm{e}_1 = (\mathrm{e}_2\times\mathrm{e}_3)$; здесь θ, φ – угловые переменные для m. Запишем явный вид солитонного решения [7] $\mathrm{tg}(\theta/2) = (R/r)^{|\nu|}$, $\varphi = \nu\chi + \varphi_0$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$ – топологический заряд, r, χ – полярные координаты в плоскости ФМ, радиус солитона R и φ_0 – произвольны параметры. Линеаризуя уравнения Ландау–Лифшица по m_1 и m_2, можно представить уравнение для спиновых волн на фоне солитона в виде двумерного уравнения Шредингера для величины $\psi = m_1 + im_2$:

$$(-\nabla^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\cos 2\theta)\psi - 2i\cos\theta\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\chi} + i\frac{2A}{\gamma M_0}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

γ – гиромагнитное отношение. Решение этого уравнения имеет вид суперпозиции цилиндрических волн

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(r)\exp(im\chi - i\omega t), \tag{3}$$

где m – азимутальное число, функции $F_m(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF_m}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}(m^2 + 2m\nu\cos\theta + \nu^2\cos 2\theta)F_m = k^2F_m, \qquad k^2 = \frac{\omega M_0}{2\gamma A}. \tag{4}$$

"Потенциал" в этом уравнении не мал, однако его анализ в длинноволновом пределе $kR \ll 1$ может быть проведен достаточно полно.

3. При $\omega = 0$ для уравнения (4) можно указать точное решение вида

$$F_m^{(0)} = [\mathrm{tg}(\theta/2)]^{m\nu}\sin\theta = (R/r)^{\sigma m}\sin\theta, \qquad \sigma = \nu/|\nu|. \tag{5}$$

Существование этого точного решения связано с тем, что при $\omega \to 0$ восстанавливается масштабная инвариантность и справедливо уравнение самодуальности, свойственное статическому 2D-уравнению Ландау–Лифшица [7] (см. также [8]). Функции (5) могут быть получены из общего решения уравнения самодуальности $(m_x + im_y)/(1 - m_z) = w = f(z)$, $z = x + iy$, если выбрать $f(z) = z^\nu + \alpha z^n$ и взять предел $\alpha \to 0$. Заметим, что таким же образом могут быть получены и длинноволновые асимптотики магнонных волновых функций на фоне более сложных солитонных конфигураций, описывающихся решением $w = f(z)$.

Простейший анализ показывает, что при $r \to 0$ решение $F_m^{(0)}(r) \propto$ $\propto (r/R)^{|\nu|-\sigma m}$, а при $r \to \infty$ имеем $F_m^{(0)}(r) \propto (r/R)^{-|\nu|-\sigma m}$. Следовательно, при

$-|\nu| < m \leq |\nu|$ функции $F_m^{(0)}(r)$ описывают магнонные моды с нулевой частотой, локализованные на солитоне (далее для простоты считаем $\nu > 0$). Итак, для солитона в ФМ с энергией (1) существует 2ν нулевых мод. Физический смысл двух из них очевиден: при $m = 1$ функция $F_1 \propto \theta_0'$ и описывает трансляционные моды, то есть сдвиг солитона как целого, случай $m = 0$ отвечает изменениям свободных параметров солитона φ_0 и R. Что касается остальных ЛМ с $\omega = 0$, которые могут существовать при $\nu > 1$, то их появление обусловлено высокой скрытой симметрией статического уравнения Ландау–Лифшица в модели (1).

4. При малых, но конечных значениях частоты ω решения $F_m^{(0)}$ можно использовать как приближенные в области $r \ll 1/k$, когда слагаемое ψk^2 в (4) мало по сравнению с членами, содержащими $d^2\psi/dr^2$ или ψ/r^2. Если же r достаточно велико, $r \gg R$, то возможно другое упрощение: при $r \gg R$ значение $\theta \to 0$ и (4) переходит в стандартное уравнение Бесселя, решение которого хорошо известно и может быть представлено в виде

$$F_m = C_1 J_n(kr) + C_2 N_n(kr), \qquad n = m + \nu, \tag{6}$$

где $J_n(x)$, $N_n(x)$ – функции Бесселя и Неймана целого индекса n (обозначение $n = m+\nu$ будет использоваться и далее). Если $kR \ll 1$, то существует широкий интервал значений переменной r, $R \ll r \ll 1/k$, в котором справедливы оба приближенных решения (5) и (6). Сравнивая асимптотики (5) при $r \to \infty$ и (6) при $kr \ll 1$, легко убедиться, что они точно совпадают при определенном выборе констант C_1, C_2. Это позволяет построить асимптотически точное решение, которое переходит в (5) при $r \sim R$ и в (6) при $kr \gtrsim 1$. (Такой прием использовался при анализе солитонов малого радиуса $R \ll \Delta_0 = (A/K)^{1/2}$ в ФМ с учетом константы анизотропии K, см. [9]). Вид асимптотического решения $F_m(r)$ зависит от m.

В области существования ЛМ $-\nu < m \leq \nu$ надо выбрать $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, и

$$F_m = -\sin\theta \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \frac{\pi}{(n-1)!} \left(\frac{kR}{2}\right)^{n} N_n(kr), \qquad -\nu < m \leq \nu. \tag{7}$$

Вне области существования ЛМ надо выбрать $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$. Для $m \leq -\nu$ сшивка $J_n(kr)$ производится с решением $F_m^{(0)}$ (5), которое имеет хорошее поведение при $r \to 0$, а при $m > \nu$ – с другим решением уравнения (4), которое легко получить из (5) стандартным методом вариации произвольной постоянной. В итоге получаем

$$F_m = \sin\theta \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} (|n|!) J_{|n|}(kr), \qquad m \leq -\nu, \tag{8}$$

$$F_m = \sin\theta \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \left[\frac{1}{n} + \frac{2}{m}\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{m-\nu}\mathrm{tg}^4\frac{\theta}{2}\right] n! \left(\frac{2}{kR}\right)^{n} J_n(kr), \qquad m > \nu. \tag{9}$$

5. Используя явный вид $F_m(r)$ (формулы (7)–(9)), можно построить общее решение для малых колебаний намагниченности. Это решение удобнее привести в терминах переменной $\tilde{\psi} = \psi \exp(i\nu\chi - i\omega t)$, которая при $r \to \infty$ переходит в $(m_x + im_y)\exp(-i\omega t)$ и описывает спиновую волну на фоне однородного состояния $\mathbf{m} \parallel \mathbf{e}_z$. В общем виде асимптотика $\tilde{\psi}$ при $r \to \infty$ с учетом (5) может быть представлена в виде

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\chi} [e^{-ikr} + S_n(k) e^{ikr}]/r^{1/2}, \tag{10}$$

где c_n – произвольные комплексные постоянные, $S_n(k) = \exp(2i\delta_n(k))$ – элементы матрицы рассеяния (знак плюс в квадратных скобках, в отличие от стандартного для 3D-солитона, возникает из-за различия асимптотик свободного движения: $(1/r)\sin kr$ для 3D и $J(kr) \propto (1/r^{1/2})\cos kr$ для 2D). Вид $S_m(k)$ при $kR \ll 1$ существенно зависит от m: в области существования ЛМ, при $-\nu < m \leq \nu$, $S_m(k) = -1$ и рассеяние максимально сильное. Вне области ЛМ значение $S_m(k) = 1$, то есть соответствующие парциальные волны ведут себя как асимптотически свободные.

Выбирая определенным образом константы c_n, можно записать общее решение задачи рассеяния плоской спиновой волны на 2D-солитоне:

$$\tilde{\psi} = e^{i\mathbf{kr}} + f(\chi) e^{ikr}/\sqrt{r},$$

$$f(\chi) = -(2/\pi k)^{1/2} e^{-i\pi/4} \sum_{m=-\nu+1}^{\nu} e^{i(m-\nu)\chi}. \tag{11}$$

Как уже отмечалось, вклад в функцию рассеяния $f(\chi)$ дают только парциальные волны в области существования ЛМ. Функция рассеяния имеет резко анизотропный характер и обращается в нуль для $2\nu - 1$ значений χ.

6. Предложенный подход (построение точных квазистатических решений на основе уравнений дуальности при $r \ll 1/k$ и сшивка их с известными решениями, описывающими динамику спинов вдали от солитона) применим и для других 2D-задач. Например, анализ ЛМ для лоренц-инвариантной σ-модели, описывающей изотропный классический антиферромагнетик, проводится практически так же, и приводит к аналогичным результатам (надо только изменить связь ω и k на следующую: $\omega = ck$, c – фазовая скорость свободных магнонов). Как отмечалось выше, этот подход может быть применен и к более сложным солитонным конфигурациям, а также для анализа динамики солитона в магнетике с конечной площадью (последняя задача важна для аналитического описания данных численного моделирования движения солитонов, которое всегда проводится для системы конечных размеров). С другой стороны, обобщение на случай анизотропных магнетиков представляет собой нетривиальную задачу.

Я благодарен В.Г.Барьяхтару, А.К.Колежуку, Ф.Г.Мертенсу (F.G.Mertens), Д.Д.Шеке и Г.И.Шнитцеру (H.I.Schnitzer) за полезные обсуждения. Данная работа частично поддержана грантом 2.3/194 ГКНТ Украины (грантом UB7000) Международного научного фонда (ISF), а также (грантом 025) Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук (ISSEP) Международного фонда "Возрождение".

---

1. Ю.А.Изюмов, УФН **155**, 553 (1988).
2. R.Rajaraman. *An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
3. V.G.Bar'yakhtar and B.A.Ivanov, Sov. Sci. Review Sec. A - Physics, Ed. by I.M.Khalatnikov, **16**(3), 1 (1992).

4. J.R.Currie, J.A.Krumhansl, A.R.Bishop, and S.E.Trullinger, Phys. Rev. B**22**, 477 (1980).
5. Г.А.Крафтмахер, В.В.Мериакри, А.Я.Червоненкис, В.И.Щеглов, ЖЭТФ **63**, 1353 (1972).
6. J.P.Boucher, G.Rius, and Y.Henre, Europhys. Lett. **4**, 1073 (1987).
7. А.А.Белавин, А.М.Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
8. А.М.Переломов, УФН **134**, 577 (1981).
9. В.П.Воронов, Б.А.Иванов, А.М.Косевич, ЖЭТФ **84**, 2235 (1983).