Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.12, стр.970 - 975 © 1995 г. 25 июня

ФАКТОР ФОРМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Ю.Е.Кузовлев

Физико-технический институт НАН Украины

340114 Донецк, Украина

Поступила в редакцию 28 апреля 1995 г.

Предложен подход к описанию в рамках модели Бина эволюции критического состояния сверхпроводников II рода с учетом реальных геометрических характеристик образца.

1. Как известно, ряд свойств сверхпроводников II рода, обладающих пиннингом вихрей, могут быть описаны в рамках концепции квазиравновесного "критического состояния", характеризующегося балансом силы Лоренца и сил трения, обусловленных пиннингом вихрей. В простейшем случае (модель Бина) максимальное (критическое) значение силы трения покоя $\sim \Phi_0 j_c$, действующей на единицу длины вихря и определяющей критическую плотность тока j_c, не зависит от магнитной индукции, то есть от концентрации вихрей, а также от их ориентации. Однако даже в этом случае для извлечения критической плотности тока из результатов диамагнитных измерений необходимо знать геометрические характеристики критического состояния. Так, при намагничивании замороженного в нулевом поле образца диамагнитный отклик определяется, помимо j_c, эволюцией формы поверхности, ограничивающей некоторую область, где магнитная индукция сохраняется равной нулю. В частности, представляет интерес значение внешнего поля H_m, при котором эта область исчезает, а диамагнитный момент образца достигает насыщения.

Подобные характеристики известны только для предельных случаев длинного цилиндра, ориентированного вдоль поля [1], и очень тонкого диска [2–4], расположенного поперек поля (либо тонкой полоски [5]). В настоящей работе рассматривается более реалистическая геометрия – когда все размеры конечны. Показывается, что использование разложения по сферическим гармоникам позволяет получить явное выражение для H_m, а также цепочку "интегралов движения" (функционалов от формы границы экранированной области, не меняющихся при изменении внешнего поля), которые могут быть полезными при численном моделировании. Для простоты мы предположим, что образец обладает выпуклой поверхностью и аксиальной симметрией, ось которой параллельна внешнему полю. Еще будем считать, что существенные для критического состояния поля много больше H_{c1}, и что сверхпроводник изотропен в плоскости, перпендикулярной внешнему полю.

2. При достаточно малой величине внешнего поля H_e образец содержит заэкранированную область, в которой суммарная индукция и ток равны нулю. Благодаря выпуклости поверхности образца можно полагать, что эта область является односвязной, а ее граница также выпукла. Выберем начало полярных координат на оси вращательной симметрии Z внутри этой области. Тогда ток и вектор-потенциал могут быть записаны в виде

$$j_x = -J(r,u)\sin\varphi, \qquad j_y = J(r,u)\cos\varphi,$$

$$A_x = -F(r,u)\sin\varphi, \qquad A_y = F(r,u)\cos\varphi,$$

где $u \equiv \cos\vartheta$, $J(r,u) = -j_c$ при $R(u,H_e) < r < R_0(u)$ и $J(r,u) = 0$ в противном случае, а $r = R_0(u)$ и $r = R(u,H_e)$ есть соответственно уравнения поверхности образца и границы экранированной области. Для внутренности последней, то есть при $r < R(u,H_e)$, используя обычное разложение по сферическим гармоникам, несложно получить

$$F(r,u) = \frac{1}{2}H_e r(1-u^2)^{1/2} - \sum_{n\geq 0} r^{n+1}Q_n(u)I_n(H_e), \tag{1}$$

где

$$I_n(H_e) = \frac{j_c}{(2n+3)(n-1)}\int [R^{1-n}(u,H_e) - R_0^{1-n}(u)]Q_n(u)du \tag{2}$$

и введены обозначения

$$Q_n(u) \equiv Y_{n+1,1}(u) = (1-u^2)^{1/2}P_n^{(1,1)}(u),$$

$P_n^{(1,1)}(u)$ - полиномы Якоби, $Y_{LM}(u)$ - нормированные на единицу сферические функции аргумента $u = \cos\vartheta$, ϑ - полярный угол. При $n = 1$ интеграл $I_1(H_e)$ очевидным образом выражается через логарифм $\ln(R_0/R)$. Первое слагаемое в правой части (1) относится к внешнему полю, а сумма - к полю сверхтока.

В силу полной компенсации внешнего поля коэффициенты при всех степенях разложения по r в (1) должны равняться нулю. Отсюда с учетом $Q_0(u) = 1/2\sqrt{3(1-u^2)}$ следует, что

$$\int [R_0(u) - R(u,H_e)]\sqrt{1-u^2}du = 2H_e/j_c \tag{3}$$

$$I_n(H_e) = 0 \qquad (n \geq 1) \tag{4}$$

Равенство (3) дает непосредственный рецепт определения характерного поля H_m. Именно, поместим начало координат в ту точку, к которой стягивается свободная от магнитного потока область. Тогда при $H_e = H_m$ величина $R(u,H_e) = 0$ и, следовательно,

$$H_m = j_c \int R_0(u)\sqrt{1-u^2}du/2. \tag{5}$$

В предположении аксиальной симметрии данная предельная точка находится на оси вращения Z, а ее позиция здесь определяется, очевидно, условием максимума интеграла в (5). Если же образец обладает дополнительно зеркальной симметрией относительно плоскости, перпендикулярной полю, то предельная точка просто совпадает с центром образца. Отсюда для образца в форме эллипсоида вращения с отношением горизонтальной и вертикальной полуосей $a : b$ находим:

$$\begin{aligned} H_m^{ell} &= j_c b[K(k) - E(k)]/k^2, & k &\equiv (1-b^2/a^2)^{1/2}, \quad a > b; \\ H_m^{ell} &= j_c a[E(k) - (1-k^2)K(k)]/k^2, & k &\equiv (1-a^2/b^2)^{1/2}, \quad a < b, \end{aligned} \tag{6}$$

где K, E - эллиптические интегралы (для шара $H_m = \pi j_c a/4$), а для цилиндра (таблетки) с радиусом a и толщиной $2b$

$$H_m^{cil} = j_c b\ln[a/b + (1 + a^2/b^2)^{1/2}]. \tag{7}$$

Если $a \gg b$, то $H_m^{cil} \cong H_m^{ell} + j_c b(1 - \ln 2)$.

Заметим, что если рассматривать в (3), (4) позицию начала координат r_0 как независимую переменную, то соотношения (4) становятся следствием (3). При малом смещении r_0 на dz по оси Z уравнение поверхности испытывает изменение $dR_0(u) = [(1-u^2)\partial \ln R_0(u)/\partial u - u]dz$, и так же изменяется $R(u, H_e)$. Можно показать, что из инвариантности равенства (3) по отношению к таким преобразованиям последовательно вытекают равенства (4).

Для анализа эволюции экранированной области полезна инфинитезимальная форма соотношений (3), (4):

$$\int D(u)\sqrt{1-u^2}du = 2, \qquad (8)$$

$$\int D(u)\sqrt{1-u^2}P_n^{(1,1)}(u)R^{-n}(u, H_e)du = 0 \qquad (n > 0), \qquad (9)$$

где скорость проникновения магнитного потока в образец

$$D(u) \equiv -j_c \partial R(u, H_e)/\partial H_e$$

представляет собой некоторую функцию от внешнего поля и функционал от $R(u, H_e)$. Данную функцию можно связать с распределением плотности мейсснеровского тока j_{meiss} в теле, форма которого совпадает с формой экранированной области. Действительно, при малом увеличении внешнего поля на dH_e плотность тока может измениться только внутри этой области, так как в остальной части образца она уже имеет критическое значение. Это изменение таково, что суммарная индукция здесь остается всюду равной нулю, за исключением тонкого слоя вблизи $r = R(u, H_e)$. Следовательно, плотность тока меняется на $d\mathrm{j} = \mathrm{j}_{meiss}dH_e$, где j_{meiss} – мейсснеровский ток, индуцированный единичным полем. Отметим, что соотношению $d\mathrm{j}/dH_e = \mathrm{j}_{meiss}$ удовлетворяет, например, полученное в [2] точное решение для бесконечно тонкой пленки.

Таким образом, в объемном случае, как и в случае плоской геометрии [2], ток j представляет собой линейную комбинацию мейсснеровских токов. Однако теперь каждый из них сосредоточен на поверхности экранированной области и записывается как $j_{meiss} = i(u)\delta(r - R(u, H_e))/\cos\alpha$. Здесь $i(u)$ – соответствующий поверхностный ток, индуцированный единичным внешним полем, а α – угол между радиусом-вектором данной точки поверхности и нормалью к ней. Очевидно, что вызванное возрастанием H_e смещение поверхности вглубь образца по направлению нормали равно $i(u)dH_e/j_c$, а по радиусу-вектору – в $1/\cos\alpha$ раз больше. Отсюда, выражая $\cos\alpha$ через уравнение поверхности, имеем

$$D(u) = i(u)[1 + (1-u^2)(\partial \ln R(u)/\partial u)^2]^{1/2} \qquad (10)$$

(аргумент H_e далее для краткости опущен).

Ниже ограничимся случаем зеркальной симметрии и поместим начало координат в середину образца. Если последний имеет форму шара, то на начальной стадии проникновения поля, то есть при $R(u) \cong R_0(u) = \mathrm{const}$, как следует из (5), $D(u) = 3/2\sqrt{1-u^2} \sim \sin\vartheta$. Отсюда нетрудно увидеть, что экранированная область сразу начинает заостряться на полюсах и принимает форму веретенообразной фигуры. Понятно, что такое образование конусов на полюсах будет иметь место и в общем случае. Благодаря данному обстоятельству при дальнейшем увеличении поля тангенциальная составляющая индукции у полюсов становится отличной от нуля. Это, в свою очередь, приводит к ненулевому значению поверхностного мейсснеровского тока $i(u)$ у полюсов ($u = \pm 1$) и, как видно из (10), величины $D(\pm 1)$, то есть к постепенному сжатию экранированной области по оси Z.

3. Следовательно, для численного моделирования эволюции критического состояния с использованием некоторой аналитической аппроксимации поверхности $R(u)$ необходимы по крайней мере три параметра, которые определяли бы два характерных размера и угол раствора конусов на полюсах. Зависимость этих параметров от внешнего поля можно найти из трех уравнений – (3) и (4), при $n = 2$ и $n = 4$. Интересно сравнить результаты вычислений для сильно сплюснутого тела с конечной и переменной толщиной с аналитическим выражением, полученным для бесконечно тонкого круглого диска [2]. Для тела в форме эллипсоида естественно аппроксимировать поверхность $r = R(u)$, в декартовых координатах, кривой, получаемой коническим сечением. Соответствующее выражение в полярных координатах имеет вид $R(u) = b/[p(1-u^2)^{1/2} + (u^2 + s^2(1-u^2))^{1/2}]$, где b – полутолщина экранированной области на оси Z, ее радиус равен $a = b/(p+s)$, параметр $p \geq 0$ описывает заострение на полюсах. Пусть при $H_e = 0$ имеем $p = 0$ и $a \gg b$. Как и следовало ожидать, уменьшение радиуса с ростом H_e определяется характерным полем $H_c = j_c b$. Однако при $H_e > H_c$ и $H_m - H_e > H_c$ численно найденная зависимость $a(H_e)$ оказалась близкой к $a(H_e) = a(0)\exp(-H_e/H_c)$, тогда как для круглой пленки имеет место зависимость $a(H_e) = a(0)/\mathrm{ch}(H_e/H_c)$ с тем же самым значением H_c, то есть радиус примерно в два раза больше. Заметим, что объемным аналогом пленки является очень тонкая таблетка (поскольку в ней интеграл от плотности критического тока по толщине не зависит от положения в горизонтальной плоскости). Следовательно, неравномерность толщины приводит к относительно малому эффективному сдвигу внешнего поля на величину порядка $H_c = j_c b$ (то есть, как видно из (6), (7), порядка разности между H_m^{cil} и H_m^{ell}), но к существенному изменению радиуса экранированной области в одном и том же поле (на десятки процентов).

4. Приведенные выше результаты относятся к процессу монотонного увеличения внешнего поля, начиная с нуля. Этот процесс является необратимым, поскольку последующее уменьшение поля приводит не к попятному движению экранированной области, а к появлению у границы образца и расширению слоя с инвертированным направлением критического тока (что соответствует выходу вихрей из образца и зарождению вихрей обратной полярности [1–4]). Геометрия возникшей границы раздела областей с противоположно направленными токами может быть, в принципе, определена из соотношений, очевидным образом обобщающих (1)–(4), а токовая конфигурация в целом сконструирована в полной аналогии с тем, как это сделано в [2–4] для пленки. При этом, однако, не обойтись без приближенных методов. Проведенное выше рассмотрение, возможно, будет полезным для их реализации.

1. P.G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*. Benjamin, N.-Y., 1966.
2. P.N.Mikheenko and Yu.E.Kuzovlev, Physica C **204**, 229 (1993).
3. J.Zhu, J.Mester, J.Lokhart and T.Turneaure, Physica C **212**, 216 (1993).
4. J.R.Clem and A.Sanchez, Phys. Rev. B **50**, 9355 (1994).
5. E.H.Brandt, M.Intenbom, and A.Forkl, Europhys. Lett. **22**, 735 (1993).