

## НОВЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Богданов

*Физико-технический институт НАН Украины  
340114 Донецк, Украина*

Поступила в редакцию 29 мая 1995 г.

Взаимодействия, описываемые инвариантами, линейными по первым пространственным производным (инварианты Лифшица), стабилизируют двухмерные и трехмерные локализованные состояния. Для двухмерных локализованных состояний (вихрей) определена сила взаимодействия на больших расстояниях.

1. Локализованные решения нелинейных уравнений математической физики (солитоны) на протяжении многих лет являются объектом исследования в теории конденсированного состояния, в физике элементарных частиц и ядра, в астрофизике и космологии, в биофизике [1]. В частности, в физике элементарных частиц интерес к таким объемам связан с попыткой создания структурной теории, в рамках которой элементарные частицы представляли бы собой локализованные решения нелинейных полевых уравнений, а физические поля описывались бы асимптотиками этих решений [1]. Такая теория позволила бы снять дуализм частица – поле, а также устранить другие непоследовательности теорий, основанных на концепции точечных частиц.

Успехи современной теории солитонов в основном связаны с одномерными системами. Более того, в отношении многомерных локализованных состояний было показано, что для многих физических полевых моделей такие решения неустойчивы [1–4]. Долгое время абрикосовские вихри [5] в сверхпроводниках являлись единственным примером многомерных стационарных локализованных состояний в физических системах. Однако в работах [6–8] было показано, что в магнетиках без центра инверсии инварианты, линейные по первым пространственным производным (инварианты Лифшица), стабилизируют двухмерные локализованные состояния – магнитные вихри. Уравнения, описывающие данные неоднородные состояния, значительно проще соответствующих уравнений для вихревых нитей в сверхпроводниках. Поэтому вихревые структуры в системах в инвариантами Лифшица являются удобным объектом для моделирования "корпускулярных" свойств локализованных состояний.

Кроме магнетиков [9,10], взаимодействия, описываемые инвариантами, линейными по первым пространственным производным, имеют место также в определенных классах сегнетоэлектриков и жидких кристаллов, в других системах [11,12].

В данной работе рассчитана сила взаимодействия между двумя магнитными вихрями. Показано, что взаимодействия, описываемые инвариантами Лифшица, стабилизируют двухмерные и трехмерные локализованные состояния.

2. Рассмотрим поле единичного вектора  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \theta)$  с функционалом взаимодействия

$$W = \int w dx = \int \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{4k}{\pi} \mathbf{n} \text{rot} \mathbf{n} + (1 - n_z^2) + 2h(1 - n_z) \right] dx. \quad (1)$$

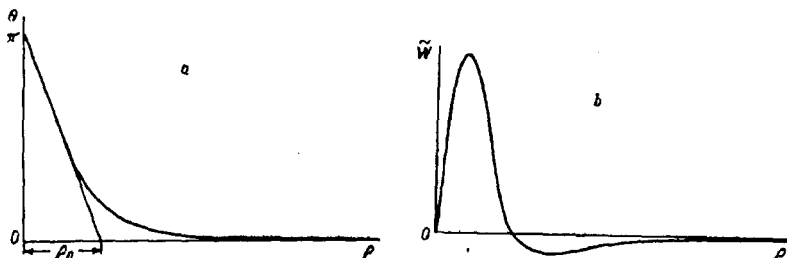
Первый член описывает жесткость системы, второй член является одной из возможных форм инварианта Лифшица. Функционал (1) описывает энергию кубического ферромагнетика без центра инверсии [10] с наведенной одноосной анизотропией в магнитном поле  $h$ . Выбор функционала (1) продиктован необходимостью использовать здесь некоторые результаты, полученные в [7, 8] для магнитных вихрей. Однако, как показано ниже, исследуемые в работе неоднородные состояния возникают в системах с функционалом взаимодействия достаточно общего вида.

При  $|k| < 1$  и  $h > 0$  минимуму (1) соответствует однородное состояние с  $n_0 = (0, 0, 1)$ . Однако это решение не исчерпывает всех стационарных состояний поля. Следуя [6-8], можно показать, что среди метастабильных возбуждений данного поля существуют, однородные по  $z$ , аксиально-симметричные состояния  $\psi(\varphi)$ ,  $\theta(\rho)$  (вихри). Здесь введены цилиндрические координаты для пространственной переменной  $x = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ .

При  $0 < k < 1$  уравнениям Эйлера для функционала (1) удовлетворяют решения  $\psi(\varphi) = \varphi - \pi/2$ , а  $\theta(\rho)$  определяется из уравнения

$$\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\theta}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{4k \sin^2 \theta}{\pi \rho} - \sin \theta \cos \theta - h \sin \theta = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями  $\theta(0) = \pi$ ,  $\theta(\infty) = 0$ .



В работах [7, 8] численным интегрированием уравнения (2) были определены равновесные параметры и границы существования магнитных вихрей. На рисунке приведены характерные зависимости  $\theta(\rho)$  (а) и "линейной" плотности  $\tilde{w}(\rho)$  (б) равновесной энергии

$$\tilde{W} = \int_0^{\infty} \tilde{w}(\rho) d\rho.$$

В центральной части (ядре) плотность энергии вихря выше плотности энергии основного состояния  $n_0$  (вакуума) и становится отрицательной в периферийной области (см. рисунок б). При  $\rho \gg 1$

$$\theta(\rho) = A \exp(-\rho\sqrt{1+h}). \quad (3)$$

В исследуемой области вихри представляют собой достаточно сильно локализованные возбуждения поля с положительной (относительно вакуума) энергией (см. рисунок). Ядро, в котором сконцентрирована основная часть энергии вихря, можно рассматривать как двухмерную "элементарную частицу". А величина

$$\rho_0 = \pi(d\theta/d\rho)_{\rho=0}^{-1}$$

может служить ее размером. Слабое возмущение вакуума в области  $\rho \gg 1$  (3) представляет собой "поле", создаваемое данной частицей. Характер взаимодействия частиц определяется направлением вращения  $\theta$ : частицы с одинаковым направлением вращения будут отталкиваться, с противоположным – притягиваться. Аргументация здесь такая же, как и при анализе взаимодействия плоских блоховских доменных границ в ферромагнетике [13]. Топологический заряд [1]

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \sin \theta(r) d\theta(r) d\psi(r),$$

принимающий значения 1 или  $-1$  в зависимости от направления вращения  $\theta$  в вихрях, играет роль электрического заряда.

Для вычисления силы взаимодействия между параллельными вихревыми линиями, расположенными на расстоянии  $r \gg 1$  друг от друга, используем выражение для изменения импульса поля  $F$  через компоненты тензора напряжения  $T_{ik}$  (см. [11], т.2, с.109). Пусть две вихревые линии, параллельные оси  $Z$ , пересекают плоскость  $XY$  в точках  $(r/2, 0)$  и  $(-r/2, 0)$ . Можно показать, что величина силы взаимодействия между вихрями (на единицу их длины) равна

$$F_x = - \int_{-\infty}^{\infty} T_{xx} dy. \quad (4)$$

Вдали от центров вихрей уравнения поля линейны, поэтому при интегрировании в (4) будем считать, что на оси  $Y$  решения для  $n$  представляют собой суперпозицию решений для уединенных вихрей (см. (2), (3)). Сохраняя в  $T_{xx}$  члены, квадратичные по  $\theta \ll 1$  (3), получаем для  $F_x$  (4) следующее выражение:

$$F_x = -4A^2(1+h)rK_1(r\sqrt{1+h}) = -2\sqrt{2\pi}A^2(1+h)^{3/4}r^{1/2} \exp(-r\sqrt{1+h}). \quad (5)$$

Последнее выражение получено разложением функции Макдональда

$$K_1(k) = \int_0^{\infty} \exp(-k\sqrt{1+t^2}) dt$$

в области больших аргументов ( $k \gg 1$ ) (см. [14]). Выражение (5) описывает отталкивание одинаковых частиц. Для частиц с противоположной четностью знак в (5) меняется на противоположный.

Поскольку в данной модели четность частиц определяет характер их взаимодействия (заряд),  $CP$ -инвариантность выполняется автоматически. Следует, однако, иметь в виду, что в зависимости от знака  $k$  в (1) устойчивым будет вихрь с одним из альтернативных направлений вращения  $\theta$ , то есть "анти-частица" является неустойчивой. Можно попытаться стабилизировать вихрь с противоположным зарядом путем усложнения его внутренней структуры. Например, рассмотреть вихревые состояния с вращением  $\theta$  на угол, кратный  $\pi$ . Такой вихрь обладал бы большей внутренней энергией ("массой") по сравнению с вихрем противоположного заряда (это напоминает массивность протона по сравнению с электроном). Отметим также, что инвариант Лифшица в (1), стабилизируя локализованные состояния, не влияет на характер взаимодействия между ними (см. (5)).

3. Рассмотрим теперь с более общих позиций влияние взаимодействий, описываемых инвариантами Лифшица, на стабилизацию локализованных состояний. Для этого нет необходимости конкретизировать вид отдельных взаимодействий. Достаточно в функционале системы выделить члены, квадратичные ( $w_1$ ) и линейные ( $w_2$ ) по пространственным производным, а также не содержащие пространственных градиентов ( $w_3$ ). Рассмотрим локализованные по  $D$  пространственным координатам состояния, описываемые одной конфигурационной переменной  $\theta$ :

$$W^{(D)} = \int [w_1(\theta) + w_2(\theta) + w_3(\theta)] d^D x. \quad (6)$$

Пусть  $\theta_c^{(D)}(x)$  – локализованное решение размерности  $D$ . Это, в частности, предполагает, что при  $x \rightarrow \infty$   $\theta$  стремится к некоторой равновесной величине  $\theta_0$ , а интегралы

$$I_i^{(D)} = \int w_i(\theta_c^{(D)}) d^D x \quad (7)$$

имеют конечные значения. Введем новые функции

$$\theta_c^{(D)}(x) = \theta_c^{(D)}(x/a). \quad (8)$$

Функции (8) получены радиальной деформацией (растяжением–сжатием) экстремалей  $\theta_c^{(D)}(x)$ . Подстановка (8) в (6) позволяет вычислить функцию  $W^{(D)}(a)$ , определяющую изменение потенциалов (6) по сравнению с их экстремальными значениями  $W_0^{(D)}$  (вычисленными для функций  $\theta_c^{(D)}(x)$ ):

$$W^{(D)} = I_1^{(D)} a^{D-2} + I_2^{(D)} a^{D-1} + I_3^{(D)} a^D. \quad (9)$$

Условия радиальной устойчивости стационарных локализованных решений  $\theta_c^{(D)}(x)$  формулируются так:

$$\left( \frac{dW^{(D)}}{da} \right)_{a=1} = (D-2)I_1^{(D)} + (D-1)I_2^{(D)} + DI_3^{(D)} = 0, \quad (10)$$

$$\left( \frac{d^2W^{(D)}}{da^2} \right)_{a=1} = (D-2)(D-3)I_1^{(D)} + (D-1)(D-2)I_2^{(D)} + D(D-1)I_3^{(D)} > 0. \quad (11)$$

Интегральные соотношения (10) определяют относительный вклад различных энергий в полную энергию равновесных локализованных состояний. При  $I_2^{(D)} = 0$  и  $D = 3$  соотношение (11) не выполняется, то есть для функционала (6) с  $w_2 = 0$  трехмерные стационарные локализованные состояния энергетически неустойчивы. Этот результат был получен в [2, 3] (теорема Хобарта–Деррика) и позднее распространен на двухмерный случай [4].

Взаимодействия, описываемые инвариантами Лифшица, не изменяют условия радиальной устойчивости одномерных локализованных состояний, однако существенны для многомерных систем. Из (10) и (11) следует, что в системах с функционалом взаимодействия достаточно общего типа (6) возможны двухмерные и трехмерные радиально устойчивые стационарные локализованные состояния. Во избежание недоразумения следует отметить, что в данной работе рассмотрены системы с однородным основным состоянием (это имеет

место при достаточно низкой энергии  $\omega_2$  в (6)). В этом случае достаточно проверить метастабильные локализованные состояния на радиальную устойчивость. Если же энергия  $\omega_2$  достаточно велика, то основному состоянию системы соответствует модулированная структура. Например, для потенциала (1) это имеет место при  $k > 1$ . В таких системах при изучении устойчивости локализованных состояний необходимо рассматривать возмущения более общего вида [8].

Автор выражает признательность Фонду Александра фон Гумбольдта за финансовую поддержку.

Я благодарен А.Хуберту за стимулирующие дискуссии и критические замечания, а также С.Орлу, С.Тарасенко и А.Филиппову за обсуждение работы и полезные советы.

- 
1. C.Rebbi and G.Soliani, *Solitons and Particles*, World Scientific Publ. Co.: Singapore 1984.
  2. R.H.Nobart, *Proc.Phys. Soc.* **82**, 201 (1963).
  3. G.H.Derrick, *J. Math. Phys (New York)* **5**, 1252 (1964).
  4. В.Г.Маханьков, Ю.П.Рыбаков, В.И.Санюк, *УФН* **164**, 121 (1994).
  5. А.А.Абрикосов, *ЖЭТФ* **32**, 1442 (1957).
  6. А.Н.Богданов, Д.А.Яблонский, *ЖЭТФ* **95**, 178 (1989); А.Н.Богданов, М.В.Кудинов, Д.А.Яблонский, *ФТТ* **31**, 99 (1989).
  7. A.N.Bogdanov and A.Hubert, *JMMM* **138**, 255 (1994).
  8. A.N.Bogdanov and A.Hubert, *Phys. Stat. Sol. (a)* **186**, 527 (1994).
  9. И.Е.Дзялошинский, *ЖЭТФ* **46**, 1420 (1964).
  10. Ю.А.Изюмов, *УФН* **27**, 850 (1984).
  11. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теоретическая физика*, т.2; *Теория поля*, т.5; *Статистическая физика*, т.8, *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1973–1982.
  12. A.Fert and P.M.Levy, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1538 (1980).
  13. А.Хуберт, *Теория доменных стенок в упорядоченных средах*, М.: Мир, 1977.
  14. Г.Бейтман, А.Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т.2, М.: Наука, 1974.