

## КИНЕТИКА ЛАВИННОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

С.Н.Дороговцев<sup>1)</sup>

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН  
194021 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 29 мая 1995 г.

Решена задача о лавинном перемешивании двух фракций гранулированного материала. Фракции перемешиваются в цилиндре, медленно вращающемся вокруг своей продольной оси, расположенной горизонтально. Цилиндр заполнен не полностью, и в каждый момент времени перемешивание происходит лишь в поверхностном слое гранул. Описаны режимы – диффузии с конвекцией и быстрого перемешивания.

После появления пионерских статей [1–3] по самоорганизованной критичности также резко увеличилось число работ (прежде всего – эксперимент и компьютерное моделирование), посвященных изучению различных аспектов перемешивания гранулированных материалов [4–7]. Физика процесса перемешивания оказалась весьма нетривиальной, а возникающие на эксперименте картины часто выглядят столь эффектно, что иллюстрация к работе [7] попала на обложку мартовского номера Nature. Именно этой иллюстрацией и инициировано настоящее сообщение.

1. Рассмотрим самую простую модель, допускающую аналитическое описание процесса перемешивания. В цилиндр, продольная ось которого расположена горизонтально, засыпаны гранулы двух сортов – скажем, черные и белые. В остальном гранулы разных фракций не различаются. Цилиндр находится в поле тяготения и заполнен не полностью. В начальный момент времени черная фракция насыпана сверху белой (см. рис. 1a). Цилиндр начинает адиабатически медленно вращаться вокруг своей продольной оси (против часовой стрелки, для определенности). Таким образом, роль времени играет угол поворота цилиндра. Мы считаем, что задача однородна вдоль оси цилиндра и не рассматриваем продольные перемещения гранул [5, 6], поэтому вместо объемов можно говорить о площадях. Ответ от радиуса цилиндра зависеть не будет, и его можно считать единичным. Объемы незаполненного пространства и черной фракции будем также характеризовать углами раствора  $\theta$  и  $\chi$ , соответственно (см. рис. 1a). Состояние каждой из точек материала будем описывать величиной  $\rho$  – долей черного материала в данном месте (там, где весь материал – черный,  $\rho = 1$ , где – белый,  $\rho = 0$ ). Общую плотность гранулированного материала положим единичной, так что  $\rho(x, t)$  играет роль плотности черной фракции в точке  $x$  в момент  $t$ .

Будем считать, что гранулы не могут пересыпаться и проскальзывать относительно поверхности цилиндра, пока они находятся в глубине материала. Пересыпаются они, только выходя на свободную поверхность (см. рис. 1b). При вращении цилиндра со свободной поверхности непрерывно сходят лавины, в которых лишь и могут перемешиваться фракции. Такое перемешивание называется лавинным [7]. В реальном эксперименте поверхность – плоская

<sup>1)</sup>e-mail: dorogoy@masha.shuv.pti.spb.ru

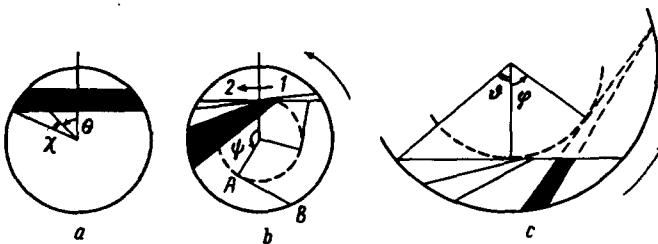


Рис.1. а – Расположение фракций до начала вращения цилиндра. б – Схема пересыпания в один из моментов времени. При бесконечно малом повороте цилиндра гранулы разных фракций из сектора 1 пересыпаются в сектор 2, равномерно перемешиваясь. Поэтому уже после первого оборота плотность черного материала вдоль любой из касательных типа  $AB$  одинакова. Положение каждой такой касательной фиксируется углом  $\phi$ . в – Один из моментов времени  $0 < t < 2\theta$  ( $\vartheta \equiv \pi - \theta$ ) в случае, когда цилиндр заполнен менее чем наполовину

и при медленном вращении цилиндра наклонена под углом трения (строго говоря, этот угол слегка флюктуирует с течением времени, но, оказывается, эти вариации невелики [7], и мы ими пренебрежем). Значение угла трения в наши ответы не войдет, и мы можем положить его равным, например, нулю.

Нам придется сделать еще одно сильное предположение. Будем считать, что в лавинах материал перемешивается полностью, то есть до однородного состояния (см. рис.1б). Такое предположение представляется естественным выбрать в качестве начального приближения, если не вникать в тонкости, связанные со структурой гранул (их слипанием, зацеплением и т.п.). Тогда при вращении цилиндра во всех точках левой половины свободной поверхности  $\rho$  одинаково. Поэтому уже после первого оборота мы можем ввести  $\rho(\psi, t)$  – плотность черной фракции в момент времени  $t$  в точках касательной типа обозначенной  $AB$  на рис.1б ( $\psi$  – угол между соответствующим радиус-вектором и нормалью к свободной поверхности), – основную величину, с которой мы будем иметь дело в дальнейшем.

Компьютерное моделирование [7] модели, подобной рассматриваемой, показало, что она на удивление хорошо описывает реальный эксперимент.

Можно сразу заметить, что при  $\theta < \pi/2$  (барабан заполнен более чем наполовину) перемешивание происходит лишь в кольце  $\cos\theta < r < 1$ . Средняя же часть ( $r < \cos\theta$ ) просто вращается вместе с цилиндром. При  $\pi/2 < \theta < \pi$  (цилиндр заполнен менее чем наполовину) перемешивается весь материал.

Обсудим сначала вопрос: через какое время  $T$  впервые станет  $\rho > 0$  всюду, кроме разве что центральной области в случае  $\theta < \pi/2$ , то есть когда впервые окажется "запачкан" максимально возможный объем белого материала? Пусть для простоты доля черного материала мала –  $\chi \rightarrow 0$ . Очевидно, что при  $\pi/2 < \theta < \pi$  величина  $T = 2(\pi - \theta)$ . Если же  $\theta < \pi/2$ , то после каждого нового оборота полный "угол" чисто белой фракции во внешнем кольце уменьшается на  $2\theta$ . Поэтому, как нетрудно проверить,  $T$  будет равно сумме  $2\pi[2\pi/(2\theta)]$  и  $2\pi - 2\theta[2\pi/(2\theta)]$  (здесь квадратные скобки обозначают целую часть). Тогда

$$\frac{2T}{2\pi} = 1 + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \left[\frac{\pi}{\theta}\right] \quad (1)$$

(см. рис.2).

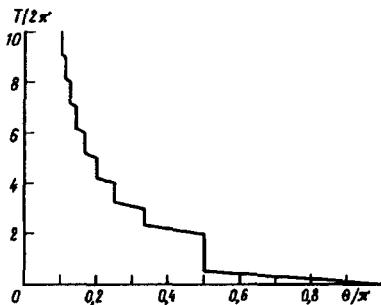


Рис.2. Зависимость времени, через которое во всех точках, кроме разве что центральной области в случае  $\theta < \pi/2$ , впервые окажется  $\rho > 0$ . Показана предельная кривая для  $x \rightarrow 0$  (черного материала мало)

2. Перейдем к описанию кинетики лавинного перемешивания в случае, когда цилиндр заполнен более чем наполовину —  $\theta < \pi/2$ . После первого же оборота состояние системы можно описать, как мы указали, распределением  $\rho(\psi, t)$ . Тогда полное количество черной фракции вне радиуса  $1 \cdot \cos \theta$  будет

$$M = \frac{\sin^2 \theta}{2} \int_0^{2\pi - 2\theta} d\psi \rho(\psi, t) + \frac{\cos^2 \theta}{2} \int_{2\pi - 2\theta}^{2\pi} d\psi \rho(\psi, t) \tan^2 \left( \frac{2\pi - \psi}{2} \right). \quad (2)$$

Здесь коэффициент перед первым интегралом появился из-за интегрирования вдоль касательной  $\int_0^{\sin \theta} dx x$  в области углов  $\psi$  радиус-вектора в интервале  $(0, 2\pi - 2\theta)$ . Когда же эти углы оказываются между  $2\pi - 2\theta$  и  $2\pi$ , касательная обрезается свободной поверхностью, ее длина становится равной, как легко убедиться,  $\cos \theta \tan[(2\pi - \psi)/2]$ , и мы получаем второй интеграл из (2). Так как перемешивание происходит только на свободной поверхности, при  $0 < \varphi < 2\pi$  и  $t > \varphi$  имеем  $\rho(\varphi, t) = \rho(0, t - \varphi)$ . Подставив это соотношение в (2) и продифференцировав по времени, получим уравнение, которое показывает, как  $\rho(\varphi)$  преобразуется за оборот:

$$\rho(\varphi, t + 2\pi) = \cot^2 \theta \int_0^{2\theta} d\zeta \rho(\varphi - \zeta, t) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)} \quad (3)$$

— дискретное линейное отображение. В простейшем случае  $\theta \ll \pi/2$  можно разложить правую часть по  $\theta$  и, введя для удобства "дискретное" время  $\tilde{t} = 2\pi[t/(2\pi)]$  (мы описываем медленное изменение  $\rho(\varphi)$ , наблюдая это распределение в моменты времени, отделенные друг от друга целыми периодами), получим следующее уравнение:

$$2\pi \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}} = -\frac{4}{3}\theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \theta^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}. \quad (4)$$

Уравнение это справедливо при  $\tilde{t} \gg 2\pi$ . Таким образом, в рассматриваемом режиме лавинное перемешивание сводится к процессу диффузии с конвекцией. Если для простоты положить, что черного материала мало ( $x \ll \theta$ ), то сначала весь он будет сосредоточен на малых углах, и в качестве начального условия можно принять  $\rho(\varphi, 0) = 4\chi \delta(\varphi)$ . Тогда получим

$$\rho(\varphi, \tilde{t}) = 4\chi \left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -n^2 \frac{\theta^2}{2\pi} \tilde{t} \right) \cos \left[ n(\varphi - \frac{2}{3\pi} \theta \tilde{t}) \right] \right\} =$$

$$= \frac{4\chi}{2\pi} \theta_0 \left( \frac{\varphi - 2\theta\tilde{t}/(3\pi)}{2\pi}, \frac{\theta^2}{2\pi^3} \tilde{t} \right), \quad (5)$$

где  $\theta_0$  – тэта-функция [8]. В области больших времен  $\tilde{t} \gg \pi^3/\theta^2$  происходит экспоненциальная релаксация с характерным временем  $t_e = 2\pi/\theta^2$  к однородному распределению  $\rho_\infty = 2\chi\theta^2/(\pi\theta^2) = 2\chi/\pi$ . На меньших же временах

$$\rho(\varphi, \tilde{t}) = \frac{4\chi}{\theta\sqrt{2\tilde{t}}} \exp \left\{ -\frac{\pi}{2\theta^2\tilde{t}} [\varphi - 2\theta\tilde{t}/(3\pi)]^2 \right\} \quad (6)$$

– стандартный ответ для линейной диффузии с конвекцией на бесконечном интервале, где центр распределения дрейфует со скоростью  $2\theta/(3\pi)$ .

3. Обсудим теперь случай  $\pi/2 < \theta < \pi$  – цилиндр заполнен менее чем наполовину (см. рис.1c), в котором перемешивание происходит уже во всем объеме и намного быстрее. Здесь, в отличие от п.2, касательные, вдоль которых  $\rho = \text{const}$ , всегда пересекают свободную поверхность, и нам удобнее использовать для описания развития процесса перемешивания во времени величину  $\rho(0, t)$  – долю черного материала в точках касательной, которая в момент времени  $t$  совпадает со свободной поверхностью. Обозначим  $\vartheta \equiv \pi - \theta$ . В случае  $t > 2\vartheta$  (то есть когда начальный этап перемешивания завершен), действуя таким же образом, что и в ранее разобранной ситуации, получим следующее уравнение:

$$\rho(0, t) = \cot \vartheta^2 \int_0^{2\vartheta} d\zeta \rho(\zeta, t) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)}. \quad (7)$$

Если же  $0 < t < 2\vartheta$ , в правой части уравнения следует ввести дополнительное слагаемое, учитывающее сброс гранул "чисто черной" фракции:

$$\rho(0, t) = \cot \vartheta^2 \int_0^t d\zeta \rho(\zeta, t) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)} + \frac{2}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial S}{\partial t}(t), \quad (8)$$

где  $\partial S(\varphi)/\partial \varphi$  – производная площади треугольника, показанного пунктиром на рис.1c, – характеризует дополнительный вклад от черной фракции. В простейшем случае  $\chi \ll \vartheta \ll \pi/2$  (то есть когда черной фракции много меньше, чем белой) можно, преодолев некоторую "школьную" геометрию, получить следующее выражение для этой производной:

$$\partial S(\varphi)/\partial \varphi = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \chi (\vartheta + \varphi/2).$$

(На самом деле это выражение должно содержать и нелинейную часть (пик) в области малых углов  $\varphi < \chi$ , которая соответствует интенсивному сбросу черной фракции в лавинах в самые первые моменты перемешивания. При  $\chi \rightarrow 0$  ее можно вырезать, предварительно перенормировав  $\chi$ , – введя дополнительный множитель  $4/3$ , чтобы сохранить правильное полное количество черной фракции.) В результате при  $\vartheta \ll \pi/2$ , введя "безразмерные" величины  $\tau \equiv t/(2\vartheta)$  и  $\nu(\tau) \equiv \rho(0, t)/(4\chi/3\vartheta)$ , получим

$$\nu(\tau) = 2 \int_0^\tau d\epsilon (\tau - \epsilon) \nu(\epsilon) + 1 + \tau, \quad 0 < \tau < 1,$$

$$\nu(\tau) = 2 \int_{\tau-1}^{\tau} d\epsilon (\tau - \epsilon) \nu(\epsilon) \quad r > 1. \quad (9)$$

Здесь решение первого уравнения играет роль начального условия для второго. Продифференцировав два раза, получим уравнения

$$\nu''(\tau) = 2\nu(\tau), \quad 0 < \tau < 1,$$

$$\nu''(\tau) = 2\nu(\tau) - 2\nu(\tau - 1) - 2\nu'(\tau - 1), \quad \tau > 1, \quad (10)$$

где  $(\cdot)' \equiv d/d\tau$ , а в начальный момент  $\nu(0) = \nu'(0) = 1$ . Решение первого из уравнений имеет вид

$$\nu(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(\sqrt{2} + 1) \exp(\sqrt{2}\tau) + (\sqrt{2} - 1) \exp(-\sqrt{2}\tau)], \quad (11)$$

так что  $\nu(1-) = 3,546$ ,  $\nu'(1-) = 4,915$ . Вторые же уравнения из (9) или (10) могут быть решены с помощью преобразования Лапласа. В итоге находим решение

$$\nu(\tau) = \frac{9}{4} + \sum_j \frac{2(z_j + 1)}{z_j^2(z_j + 2)} e^{z_j(\tau-1)} \int_0^1 d\epsilon \nu(\epsilon) [1 + z_j(1 - \epsilon) - (1 + z_j)e^{-z_j\epsilon}], \quad (12)$$

где суммирование производится по всем корням (кроме нулевых) характеристического уравнения  $z^2 - 2 + 2(z + 1)\exp(-z) = 0$  [9]. Корни эти расположены следующим образом. Имеется трехкратно вырожденный нулевой корень, который приводит к появлению слагаемого  $9/4$ , – отвечает равномерному перемешиванию с плотностью  $\rho_\infty = 3\chi/\vartheta$  на больших временах. Есть также набор комплексно сопряженных корней с асимптотическими значениями  $z_{\pm p} = -\log(p\pi) \pm (2p - 3/2)\pi i + O(\log p/p)$ ,  $p$  – положительное целое число, большее единицы. При всех  $p \geq 2$  эти значения легко уточнить, последовательно итерируя соотношение  $z = \log[2(z + 1)/(2 - z^2)]$ . Проведя суммирование в (12), получим зависимость, показанную на рис.3. Осцилляции, подобные полученным, наблюдались и на эксперименте [7].



Рис.3. Зависимость плотности черной фракции на левой половине свободной поверхности (см. рис.1c) от времени в случае, когда полный объем материала мал по сравнению с объемом пустого пространства, а объем черной фракции мал по сравнению с объемом белой:  $\tau \equiv t/(2\vartheta)$ ,  $\nu(\tau) \equiv \rho(0, t)/(4\chi/(3\vartheta))$

Начиная с  $\tau \approx 2,5$ , зависимость  $\nu(\tau)$  прекрасно описывается при учете уже двух низших ( $p = 2$ ) корней характеристического уравнения. Это выражение выглядит весьма компактно, если его написать прямо с численными коэффициентами:

$$\nu(\tau) = 9/4 + 0,496 \exp[-1,392(\tau - 1)] \cos[7,553(\tau - 1) - 1,336]. \quad (13)$$

Обратим внимание на то, что период осцилляций косинуса оказался здесь меньше единицы. В области же  $1 < \tau < 2$  ответ без особого труда удается свернуть в следующее аналитическое выражение:

$$\begin{aligned}\nu(\tau) = & [\nu(1-) - 2 - 3(\tau - 1)/2] \cosh[\sqrt{2}(\tau - 1)] + \\ & + [(\nu'(1-) - 3/2)/\sqrt{2} - \sqrt{2}(\tau - 1)] \sinh[\sqrt{2}(\tau - 1)].\end{aligned}\quad (14)$$

В заключение отметим, что гранулы, скатываясь по свободной поверхности, скачком меняют свою "фазу". Таким образом, поверхность здесь играет роль "центра проскальзывания фазы" – понятие, которое встречается в самых разных областях физики твердого тела (см., например, [10–12]).

Таким образом, мы показали, что в нашей задаче имеется два режима перемешивания: режим диффузии с конвекцией при более чем половинном заполнении цилиндра, и режим быстрого перемешивания – при менее чем половинном заполнении. Оказалось, задача имеет нетривиальное решение, хотя в ней и не приходится иметь дело со сложными нелинейными отображениями [13].

Автор благодарен В.В.Брыксину, С.А.Ктиторову, Е.К.Кудинову, А.М.Монахову, А.Н.Самухину и Ю.А.Фирсову за многочисленные и полезные обсуждения.

1. P.Bak, C.Tang, and K.Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
2. P.Bak, C.Tang, and K.Wiesenfeld, Phys. Rev. A **38**, 364 (1988).
3. C.Tang and P.Bak, Phys. Rev. Lett. **60**, 2347 (1988).
4. J.Rajchenbach, Phys. Rev. Lett. **65**, 2221 (1990).
5. O.Zik, D.Levine, S.G.Lipson et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 644 (1994).
6. K.M.Hill and J.Kakalios, Phys. Rev. E **49**, R3610 (1994).
7. G.Metcalfe, T.Shinbrot, J.J.McCarthy, and J.M.Ottino, Nature **374**, 39 (1995).
8. Н.И.Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, М.: Наука, 1970.
9. Э.Пинни, *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения*, М.: ИИЛ, 1961.
10. А.А.Абрикосов, *Основные теории металлов*, М.: Наука, 1987.
11. В.В.Брыксин, А.В.Гольцев, С.Н.Дороговцев, Письма в ЖЭТФ **49**, 440 (1989).
12. V.V.Bryksin, A.V.Goltsev, and S.N.Dorogovtsev, Physica C **160**, 103 (1989).
13. J.D.Meiss, Rev. Mod. Phys. **64**, 795 (1992).