

ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН РОССБИ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Г.Д.Чагелишвили^{*+1)}, О.Г.Чхетиани⁺¹⁾

^{*} Абастуманская астрофизическая обсерватория, АН Грузии
380060 Тбилиси, Грузия

⁺ Институт космических исследований, РАН
117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 июля 1995 г.

Рассмотрена динамика мелкой неоднородно-вращающейся атмосферы при наличии зонального сдвигового течения. Показан новый эффективный механизм трансформации волн Россби в инерционные волны, игнорируемый в традиционно используемом квазигеострофическом приближении, приводящем к уравнению Чарни-Обухова. Обнаружение этого явления стало возможным благодаря применению немодального анализа эволюции возмущений в сдвиговых гидродинамических течениях, активно применяемому в гидродинамике в последние годы.

Земные и астрофизические течения представляют собой результат переплетения множества физических явлений, каждое из которых по разному проявляет себя при формировании и эволюции характерных для этих течений волновых процессов. Математическое описание и физическое осмысление волновых процессов в первую очередь подразумевает сепарацию физических явлений по значимости в каждом конкретном случае и "отсеивание" второстепенных. Однако большое количество физических явлений – потенциальных участников волновых движений – делает отсеивание ювелирным процессом и таит в себе опасность недооценки какого-либо из факторов. Что, в конечном итоге, сулит созданием как минимум неполной, а порой существенно искаженной картины волновой эволюции.

В данной работе мы хотим обсудить тот просчет, который делается при описании эволюции волн Россби при наличии зональных сдвиговых течений. А конкретно, продемонстрируем, что в течениях с умеренно сильным сдвигом низкочастотные волны Россби, являющиеся преимущественно вихревыми, с течением времени трансформируются в высокочастотные – потенциальные инерционные волны. Фактически речь идет о существенном изменении временного масштаба волнового процесса в результате трансформации. Этот новый вид трансформации волн, существующий в сдвиговых течениях, впервые был описан в работе [1] для случая МГД волн. Физика процесса проста и легко воспринимается на примере системы связанных линейных осцилляторов. Рассмотрим два маятника, длина каждого из которых меняется во времени. Это обуславливает зависимость от времени собственных частот этих маятников: $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Предположим, что между ними есть слабая связь. Обозначая коэффициент связи через $\chi(t)$ (который в общем случае тоже зависит от времени), колебания таких связанных маятников можно записать в виде

$$\ddot{x}_1 + w_1^2(t)x_1 + \chi(t)x_2 = 0, \quad (1)$$

¹⁾e-mail: gchageli@mx.iki.rssi.ru, ochkheti@mx.iki.rssi.ru

$$\ddot{x}_2 + w_2^2(t)x_2 + \chi(t)x_1 = 0. \quad (2)$$

Если частоты этих маятников сильно отличаются друг от друга, то, несмотря на связь, обмена энергией между ними практически не происходит. Эффективный обмен энергией начинается при сближении частот осцилляторов. Необходимым условием эффективного обмена энергией является [2]:

(А) существование "области вырождения", в которой $|w_1^2(t) - w_2^2(t)| \leq |\chi(t)|$;

(В) "медленное" прохождение "области вырождения" – за период времени, существенно превышающий $\chi(t)$: $|\dot{w}_1(t)|, |\dot{w}_2(t)| \ll |\chi(t)|$.

То есть, если вначале колебался только первый маятник, то из-за изменения его длины может наступить сближение частот $w_1(t)$ и $w_2(t)$, при котором будут выполняться условия (А) и (В) в течение некоторого ограниченного промежутка времени. При этом существенная часть (а может быть, и основная часть) колебательной энергии первого маятника передается второму, в результате чего начинаются сильные колебания второго маятника. При этом первый маятник может и вовсе остановиться. Мы довольно подробно описываем этот процесс, так как будем обсуждать подобный сценарий для волн Россби.

В самом деле, условия (А), (В) справедливы для произвольных колебательных систем со связями, к которым можно свести описание целого ряда природных физических процессов. Они непосредственно применимы и к анализу линейного взаимодействия волн разных ветвей при сближении их частот друг с другом. Возникает вопрос: при каких обстоятельствах частоты распространяющихся волн зависят от времени? Чтобы ответить на этот вопрос, следует воспользоваться немодальным подходом к эволюции возмущений в сдвиговых гидродинамических течениях, широко применяемому в последнее время (см., например, [3-5]). Для целого ряда сдвиговых течений (плоское течение Куэтта, Пуазейля, круговое течение Пуазейля) линеаризованный оператор, возникающий в задаче линейной устойчивости, оказывается существенно неортогональным – собственные функции (моды) далеко не ортогональны. Так что возникает сильная интерференция собственных мод друг с другом, в результате чего, даже если все собственные моды убывают монотонно со временем, частное решение задачи может демонстрировать большой относительный рост на конечном интервале времени. По этой причине анализ отдельной собственной моды, выполненный в рамках традиционного модального подхода без учета интерференции может привести к ряду заблуждений.

Рассмотрим двухмерное сдвиговое течение $V_0 = (Sy, 0)$, где S – параметр сдвига. Хорошо известно, что из-за наличия сдвига распространяющиеся возмущения не имеют формы простой плоской волны в связи с поворотом гребня волны неоднородным средним течением [5]. Волновой вектор оказывается зависящим от времени: если в начальный момент времени возмущена фурье-гармоника с волновыми числами k_x и $k_y(0)$ ($\varphi(0) \sim \exp(ik_x x + ik_y(0)y)$), то со временем волновое число вдоль оси Y будет меняться по закону

$$k_y(t) = k_y(0) - Stk_x, \quad (3)$$

что, в свою очередь, обуславливает изменение во времени частотной характеристики пространственных фурье-гармоник $w = w(t)$, то есть

$$\varphi(t) \sim \exp \left[-i \int_0^t w(t') dt' + ik_x x + i(k_y(0) - Stk_x)y \right]. \quad (4)$$

В таком случае, если в течении существуют как минимум две ветви волн, то в первую очередь следует исследовать возможность выполнения условий (А) и (В) и затем процесс возможной взаимной трансформации волн.

В контексте вышеизложенного можно сформулировать тот недостаток, который таят в себе традиционные приближения, используемые при описании волн Россби. Характерное время осцилляции этих волн много больше оборота планеты, поэтому при их исследовании в уравнениях ограничиваются членами, обеспечивающими медленность процесса. Такое приближение, конечно, исключает возможность быстрых процессов в системе и оставляет вне поля зрения возможную трансформацию волн Россби в высокочастотные гироскопические волны при наличии зональных сдвиговых течений и, тем самым может сильно исказить картину волновых процессов в атмосфере.

Перейдем к детальному анализу процесса трансформации волн Россби в волны высокочастотной ветви. Баротропные моды в атмосфере и океанах описываются системой уравнений мелкой воды с добавлением силы Кориолиса [6]:

$$\partial_t U + (U \nabla) U + 2\Omega \sin \phi [e \times U] + \nabla P = 0, \quad (5)$$

$$\partial_t H + \nabla(HU) = 0. \quad (6)$$

Здесь H – толщина жидкого слоя, $U = (U_x, U_y)$ – горизонтальная скорость в локальной тангенциальной плоскости, e – единичный вертикальный вектор, Ω – частота вращения планеты, ϕ – широта. P – аномалия геопотенциала, пропорциональная отклонению свободной поверхности от равновесного состояния, определяемого из условия гидростатического равновесия

$$P = g(H - H_0), \quad (7)$$

где H_0 – невозмущенная толщина слоя, предполагаемая для простоты постоянной, а g – ускорение силы тяжести на поверхности планеты.

Предполагаем, что пространственные масштабы течений много меньше радиуса планеты. Это позволяет ввести локальную декартову систему координат (x, y) с координатами x вдоль широты и y вдоль меридиана. В этом случае мы можем использовать линейную аппроксимацию для параметра Кориолиса – приближение β -плоскости: $2\Omega \sin \phi = f_0 + \beta y$, где $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$; $\beta = 2\Omega \frac{\cos \phi_0}{a}$, a – радиус планеты. При дальнейшем анализе в качестве малых параметров асимптотического разложения, как правило, служат соотношения $\epsilon = (T_0 f_0)^{-1}$ и число Россби $R = V_0 / L f_0$, где T_0 , L – характерные временной и пространственный масштабы возмущений. В нижнем порядке разложения по числу Россби, соответствующего фактически усреднению по высокочастотной инерционной ветви колебаний, получается уравнение Чарни–Обухова [7], анализу которого и посвящена основная часть работ по динамике волн Россби [6-8]. Ниже мы покажем, что уже в случае простейшего сдвигового течения использование в качестве базовой модели уравнения типа Чарни–Обухова приводит

к игнорированию важных процессов обмена энергией между низкочастотными (волнами Россби) и высокочастотными (инерционными) волнами.

В самом деле, нетрудно заметить, что при наличии постоянного сдвига число Россби можно определить как $R = (\partial V_0 / \partial x) / f_0$. А в качестве безразмерного параметра, характеризующего соотношение временных масштабов, будет не число Россби, а новый параметр — $R^* = R|1 - R|^{-1/2}$, который уже при умеренных значениях R не является малым, что намного сужает область применения модели Чарни–Обухова при анализе влияния сдвиговых течений на эволюцию волн Россби.

С целью выявить детали происходящего, мы рассмотрим полную систему уравнений мелкой атмосферы и линеаризуем их на фоне плоского зонального сдвигового течения. Представим поля скорости и толщины жидкого слоя в виде $U = V_0 + V$, $H = H_0 + h$, где $V_0 = (Sy, 0)$, H_0 — являются стационарным решением системы (5), (6). После линеаризации для малых V , h и разбиения поля скорости на вихревую и потенциальные составляющие мы получим для завихренности $\omega = \text{curl}V = \partial_x V_y - \partial_y V_x$, дивергенции $\xi = \nabla V = \partial_x V_x + \partial_y V_y$ и отклонения толщины слоя h систему уравнений:

$$\partial_t \omega + Sy \partial_x \omega - S\xi + (f_0 + \beta y)\xi = 0, \quad (8)$$

$$\partial_t \xi + Sy \partial_x \xi + 2S \partial_x V_y + \beta V_x - (f_0 + \beta y)\omega + g \Delta h = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t h + Sy \partial_x h + H_0 \xi = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим решение в виде

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \xi \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}(t) \\ \hat{\xi}(t) \\ \hat{h}(t) \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_y(t)y). \quad (11)$$

Подобный подход использовался в [9] при анализе влияния сдвига на β -эффект в крайне упрощенной модели, игнорирующей эффекты сжимаемости и соответственно инерционных волн.

Перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = f_0 t, \quad k_x \Rightarrow \frac{k_x}{L}, \quad k_y \Rightarrow \frac{k_y}{L}, \quad V \Rightarrow V V_0, \quad h \Rightarrow h \frac{V_0 f_0 L}{g}, \quad \beta \Rightarrow \frac{\beta f_0}{L}. \quad (12)$$

Для амплитудных функций получим следующие уравнения:

$$\left(\partial_\tau - i \frac{\beta k_x}{k^2(\tau)} \right) \hat{\omega} - (1 - \varepsilon) \hat{\xi} = 0, \quad (13)$$

$$\left(\partial_\tau - i \frac{\beta k_x}{k^2(\tau)} \right) \hat{\xi} + 2\varepsilon \frac{k_x k_y(\tau)}{k^2(\tau)} \hat{\xi} + \left(1 - 2\varepsilon \frac{k_x^2}{k^2(\tau)} \right) \hat{\omega} - k^2(\tau) \hat{h} = 0, \quad (14)$$

$$\partial_\tau \hat{h} + \eta \hat{\xi} = 0. \quad (15)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{S}{f_0}, \quad \eta = \frac{g H_0}{f_0^2 L^2} = \frac{R o^2}{L^2}, \quad R o = \frac{(g H_0)^{1/2}}{f_0}$$

– радиус Россби. При получении (13) – (15) предполагалась малость неоднородности вращения βy по сравнению с частотой f_0 в том случае, когда эти члены действовали на одну и ту же переменную (то есть $(f_0 + \beta y)F \approx f_0 F$). Это приближение соответствует малости поперечного масштаба возмущения по сравнению с радиусом Земли и тождественно применимости приближения β -плоскости. Энергия пространственной фурье-гармоники (13)-(15) имеет вид

$$E_k = \frac{(\hat{\omega}\hat{\omega}^* + \hat{\xi}\hat{\xi}^*)}{k^2(\tau)} + \frac{\hat{h}\hat{h}^*}{\eta}. \quad (16)$$

Как правило, при графическом представлении дисперсионных кривых инерционных волн и волн Россби приводят зависимость от широтного волнового вектора k_x . Но в нашем случае, для наглядности описываемого явления трансформации волн удобнее рассматривать зависимость частоты от k_y . Действительно, в рассматриваемом нами сдвиговом течении k_y зависит от времени. Учитывая это, из приведенных нами графиков легче проследить за изменением во времени частотной характеристики волн.

Следует отметить, что при $\epsilon \neq 0$, из-за зависимости амплитуды волн от времени дисперсионное уравнение, которое можно получить из (13)-(15), строго говоря, является весьма условным. Тем не менее, оно позволяет качественно правильно понять изменение во времени частотной характеристики волн, а также оценить степень сближения разных ветвей волн, имеющего место при определенных значениях $k_y(\tau)$.

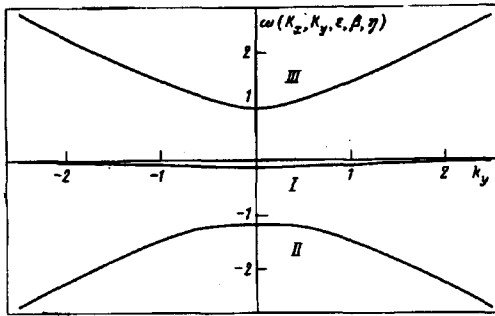


Рис.1. Дисперсионные кривые при $\epsilon = 0$, $\beta = -0,05$, $\eta = 1,0$, $k_x = 0,4$

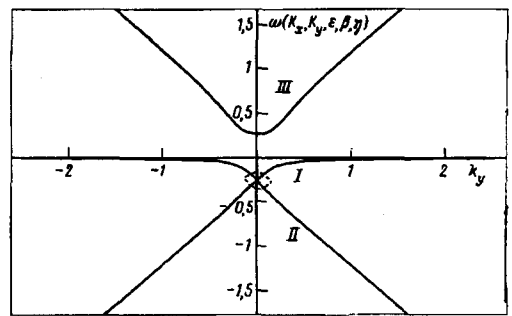


Рис.2. Дисперсионные кривые при $\epsilon = 0,6$, $\beta = -0,05$, $\eta = 1,0$, $k_x = 0,4$

На рис.1 приведены решения дисперсионного уравнения при $\epsilon = 0$. В этом случае имеются три ветви волн (см. кривые I, II и III). Ветвь I, описывающая волны Россби, практически сливается с осью k_y , так как частота этих волн намного меньше частоты двух других волн (II и III). Естественно, что условия (A) и (B) далеки от выполнения. Следовательно, волны Россби не связаны с инерционными волнами и поэтому при $\epsilon = 0$ о взаимной трансформации волн говорить не приходится.

Интересно проследить трансформацию дисперсионных кривых при $\epsilon \neq 0$ (см. рис.2). В дальнейшем будем обсуждать две ветви: I и II, так как только их групповые скорости могут совпадать друг с другом и только между ними может возникать резонансная связь. Следовательно, можно ожидать взаимных

трансформаций лишь этих волн. Уже при значениях сдвига ниже критического $\epsilon = 0,6$ (при $\epsilon = 1$ течение теряет устойчивость [10]) существует диапазон волновых чисел $k_x, k_y(\tau)$, при которых низкочастотная – I и высокочастотная – II ветви приближаются друг к другу.

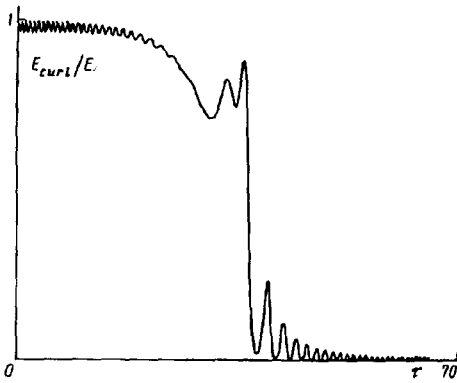


Рис.3. Отношение вихревой части энергии $\hat{\omega}^*/k^2(\tau)$ к полной энергии E_k ; $\epsilon = 0,6$, $\beta = 0,05$, $\eta = 1,0$, $k_y(0) = 10$, $k_x = 0,5$, $\tau = 0 \rightarrow 70$

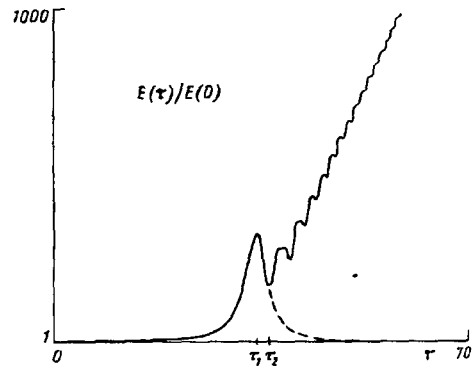


Рис.4. Зависимость полной энергии пространственной фурье-гармоники от времени; $\epsilon = 0,6$; $\beta = 0,05$; $\eta = 1,0$; $k_y(0) = 10$; $k_x = 0,5$

Возникает "область вырождения" (область, обведенная пунктиром на рис.2), в которой выполнение условий трансформации волн (условия (A) и (B)) становится очевидным. То есть, если считать, что в начальный момент времени была возбуждена лишь низкочастотная волна Россби с большим значением волнового вектора $k_y(0)$ (то есть $k_y(0)/k_x \gg 1$), то со временем, по мере изменения $k_y(\tau)$, ее частота будет увеличиваться, она попадет в область вырождения и определенная часть ее энергии трансформируется в энергию другой ветви волн. Здесь налицо полная аналогия с взаимодействующими маятниками переменной длины, приведенная в начальной части письма. Этот качественный анализ полностью подтверждается результатами численного анализа уравнений (13)–(15), который частично приведен на рис. 3 и 4. В наших расчетах мы стартовали фактически с чисто низкочастотной волны Россби, волновое число которой удовлетворяло условию $k_y(0)/k_x \gg 1$. Доля высокочастотной инерционной моды в общей энергии возмущения в начальный момент времени была ничтожно мала (см. график в момент времени $\tau = 0$ на рис.3). При условии $k_y(0)/k_x \gg 1$ волны Россби являются преимущественно непотенциальными, а высокочастотные инерционные волны – преимущественно потенциальными. Поэтому можно сказать, что начальная энергия, в основном, была сосредоточена в непотенциальной части возмущения. При $k_y(0)/k_x > 0$ и $\epsilon > 0$, $k_y(\tau)$ уменьшается с течением времени и при $\tau = \tau_1 = k_y(0)/k_x$ становится равным 0, а далее с изменением знака растет по абсолютной величине. Как видно из рис.3, по мере эволюции начального возмущения доля вихревой компоненты в полной энергии падает, пока не становится ничтожно малой. То есть, если при $\tau = 0$ энергия была сосредоточена в непотенциальных низкочастотных модах – волнах Россби, то при $\tau \gg \tau_1$ вся энергия сосредоточена в потенциальных высокочастотных возмущениях – инерционных волнах. Трансформация

волн Россби, в инерционные происходит, начиная с момента $\tau = \tau_1$ в течение ограниченного промежутка времени, в котором выполняются условия (А), (В) и эти две ветви оказываются связанными. Следует отметить, что волны ветвей I и II связаны не только между собой, но и со средним течением и обмениваются с ним энергией. Этот обмен энергией накладывается на трансформацию волн Россби в высокочастотные волны. Все эти процессы наглядно визуализуются на рис.4. При $\tau \ll \tau_1$ условия трансформации не выполняются и волны Россби обмениваются энергией лишь со средним течением – они черпают энергию сдвига и нарастают. Рост энергии исследуемой гармоники волн Россби происходит до момента $\tau = \tau_1$, после чего они начинают обратно отдавать энергию среднему течению. Но параллельно с этим процессом начинается интенсивная трансформация волны Россби в инерционные волны ветви II. При этом трансформируется существенная часть энергии волн Россби. Можно сказать, что в момент времени $\tau = \tau_2$ (см. рис.4) в течении осталась только волна ветви II. Последняя уже нарастает с течением времени, черпая энергию сдвига (см. участок графика при $\tau > \tau_2$ на рис.4). Этот рост энергии подобен процессу, описанному в [11]. Из рис.4 хорошо видно, насколько меняется процесс эволюции волны Россби из-за ее трансформации в волну ветви II: если бы последний процесс не имел бы места, то энергия волны Россби ослабевала бы по закону, отмеченному пунктирной линией на рис.4.

Хорошо известна схожесть процессов распространения волн Россби в атмосфере с ионно-дрейфовыми волнами неоднородной плазмы [6, 8]. Действительно, исходные уравнения мелкой атмосферы и уравнения для ионной компоненты плазмы ($T_i \ll T_e$) практически идентичны. При получении уравнения для дрейфовых волн фактически проводится усреднение по циклотронной частоте. Нетрудно видеть, что при наличии постоянного сдвига скорости правомочность разделения временных масштабов уже под вопросом, и по аналогии с волнами Россби здесь возможна линейная трансформация дрейфовой моды в циклотронную и наоборот.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства Науки РФ.

-
1. G.D.Chagelishvili, A.D.Rogava, and D.G.Tsiklauri, *Phys. Rev. Lett.* (submitted).
 2. G.L.Kotkin and V.G.Serbo, *Collection of problems in Classical Mechanics*, Pergamon Press, New York, 1971.
 3. G.D.Chagelishvili, T.S.Hristov, and R.G.Chanishvili, & etc, *Phys. Rev. E* **47**, 366 (1993).
 4. V.A.Gorodtssov, *Механика жидкости и газа* **2**, 94 (1988).
 5. L.N.Trefethen, A.E.Trefethen, and S.C.Reddy. & etc, *Science* **261**, 578 (1993).
 6. В.И.Петвиашвили, О.А.Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, М.: Энергоатомиздат, 1989.
 7. G.G.Sutyurin, *CHAOS* **4**(2), 203 (1994).
 8. W.Horton and A.Hasegawa, *CHAOS* **4**(2), 227 (1994).
 9. B.Farrell, *J. Atmos. Sci.* **44**, 2191, (1987).
 10. D.J.Tritton and P.A.Davies, In: *Hydrodynamics, Instabilities and the Transition to Turbulence* Eds. H.L.Swinney and J.P.Gollub, Springer-Verlag, 1981.
 11. G.D.Chagelishvili, A.D.Rogava, and I.N.Segal, *Phys. Rev. E* **50**, R4283 (1994).