

НЕЛИНЕЙНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СРЕДЫ НА ПОРОГЕ ПРОТЕКАНИЯ

А.М.Сатанин, С.В.Хорьков, А.Ю.Угольников

*Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского
603600 Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 10 мая 1995 г.

После переработки 7 июля 1995 г.

Показано, что эффективная нелинейная проводимость σ_e и коррелятор электрического поля $\langle e^4 \rangle$ смеси металл-диэлектрик на пороге протекания растут как $\sigma_e \sim h^{-\nu_4}$, $\langle e^4 \rangle \sim h^{-\epsilon_4}$ при $h \ll 1$, где $h = \sigma_2/\sigma_1$ - отношение линейных проводимостей. С использованием соотношений Дыхне получены важные неравенства для нелинейной проводимости и критических индексов. Путем численного моделирования на сетке 100×100 узлов найдены зависимости σ_e и $\langle e^4 \rangle$ от h и вычислены критические индексы $\nu_4 = \epsilon_4 = 1,33 \pm 0,05$.

В последнее время подход, основанный на идеях фрактальной геометрии [1], позволил выявить новые закономерности в физике неупорядоченных сред. Как оказалось, проводящие каналы в смесях металла с диэлектриком вблизи порога протекания [2] имеют структуру стохастического фрактала [1, 3-5]. Это означает, что геометрически токнесущий каркас представляет собой рыхлый объект, который имеет свою фрактальную размерность. Стохастические фракталы отличаются от регулярных наличием элементов случайности, однако на масштабах, больших размера минимальной неоднородности b и меньших корреляционного радиуса ξ , они обладают автомодельными свойствами, а физические процессы на них описываются степенными функциями [1]. Эффективная линейная проводимость смеси металла с диэлектриком на пороге протекания представляет собой подобную функцию. Пусть проводимость металла σ_1 , а диэлектрика σ_2 . При концентрации, соответствующей порогу p_c , реализуется режим смешанной проводимости [5]: эффективная проводимость σ_e зависит только от отношения $h = \sigma_2/\sigma_1$. В двумерном случае (при $p_c = 0,5$) зависимость σ_e от h определяется выражением

$$\sigma_e = \sigma_1 h^{1/2}. \quad (1)$$

Формула (1) впервые получена Дыхне [6] из дуальной симметрии уравнений для тока и поля. В работе Дыхне также показано, что электрическое поле e в режиме смешанной проводимости может испытывать огромные пространственные флуктуации. Коррелятор поля $\langle e^2 \rangle$ при $h \ll 1$ ведет себя как

$$\langle e^2 \rangle / E^2 \sim h^{-1/2}. \quad (2)$$

Аналогично ведет себя коррелятор квадрата поля в диэлектрической фазе [6]. Качественное объяснение (2) состоит в следующем. При малых h падение напряжения происходит между металлическими кластерами на масштабах порядка b , и электрическое поле на этих участках существенно превышает среднее поле в образце. Ввиду этого, вблизи порога протекания следует ожидать эффективного усиления нелинейных эффектов. Изучению электропроводности

нелинейной среды посвящены публикации [5, 7, 8]. Однако в этих работах отсутствует исследование нелинейной проводимости на пороге протекания.

В данной работе изучена двумерная нелинейная двухкомпонентная среда на пороге протекания. В случае кубической нелинейности показано, что эффективная нелинейная проводимость a_e растет при $h \ll 1$. Найдены точные неравенства для a_e , корреляторов полей и критических индексов. Выполнено прямое численное моделирование и получены зависимости ряда величин от отношения проводимостей линейной среды.

Рассмотрим неупорядоченную среду, состоящую из металла и диэлектрика. Плотность тока в среде описывается выражением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} + a \mathbf{e}^2, \quad (3)$$

где σ и a – случайные функции координаты. Для двухкомпонентной среды проводимости могут принимать значения σ_1 и a_1 в первой среде и σ_2 и a_2 – во второй. Распределения токов и полей находятся из уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0. \quad (4)$$

Определим эффективную линейную σ_e и нелинейную a_e проводимости среды из соотношения

$$\langle \mathbf{j} \mathbf{e} \rangle = \langle \sigma \mathbf{e}^2 \rangle + \langle a \mathbf{e}^4 \rangle = \sigma_e E^2 + a_e E^4, \quad (5)$$

где $E = \langle \mathbf{e} \rangle$ – среднее по объему электрическое поле. Для отыскания полей и токов в нелинейной среде разложим их по степеням нелинейного параметра

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \dots \quad (6)$$

В первом приближении по параметру нелинейности в выражении (5) перекрестное слагаемое $\langle \sigma \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \rangle$ исчезает в силу теоремы Теллеждена [9], то есть a_e определяется только первым членом разложения поля [8]. Таким образом, a_e зависит от распределения полей \mathbf{e}_0 в линейной среде:

$$a_e = \langle a \mathbf{e}_0^4 \rangle / E^4. \quad (7)$$

В дальнейшем всюду под \mathbf{e} будем понимать электрическое поле в линейной среде, считая, что плотность тока и поле связаны линейным законом $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$ и подчиняются уравнениям (4).

Покажем, что для расчета нелинейных характеристик среды необходимо найти коррелятор $\langle \mathbf{e}^4 \rangle$. Из соотношений Дыхне [6] можно выразить среднее от $\langle \mathbf{e}^4 \rangle_{1,2}$ для компонент через среднее для всей системы

$$\langle \mathbf{e}^4 \rangle_{1,2} = \frac{\sigma_2^2}{\langle \sigma^2 \rangle} \langle \mathbf{e}^4 \rangle, \quad \langle \mathbf{e}^4 \rangle_{2,1} = \frac{\sigma_1^2}{\langle \sigma^2 \rangle} \langle \mathbf{e}^4 \rangle. \quad (8)$$

Используя (7) и (8), имеем

$$a_e = \frac{\sigma_e^4}{\langle \sigma^2 \rangle} \langle \frac{a}{\sigma^2} \rangle \langle \mathbf{e}^4 \rangle / E^4. \quad (9)$$

Выражение (1) можно получить из (5), если использовать свойство расщепления корреляций для диссипируемой энергии $q = \mathbf{j} \mathbf{e} : \langle \mathbf{j} \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \langle \mathbf{e} \rangle = \sigma_e E^2$.

В случае нелинейной проводимости подобное соотношение отсутствует. Однако мы можем получить ряд полезных неравенств, вычисляя дисперсии соответствующих величин.

Рассмотрим дисперсию локальной диссипации q . Используя соотношение (9), после простых преобразований получим

$$\langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle = (a_e / \langle a / \sigma^2 \rangle - \sigma_e^2) E^2 \geq 0 \quad (10)$$

или

$$a_e / \sigma_e^2 \geq \langle a / \sigma^2 \rangle. \quad (11)$$

Из (11) следует:

$$a_e \geq (a_1 h + a_2 / h) / 2. \quad (12)$$

Правая часть (12) имеет минимум при $h = (a_2 / a_1)^{1/2}$, то есть нелинейная проводимость всегда ограничена снизу:

$$a_e \geq (a_1 a_2)^{1/2}. \quad (13)$$

Вычисляя дисперсию величины e^2 , найдем

$$\langle e^4 \rangle / E^4 \geq \langle \sigma \rangle^2 / \sigma_e^2. \quad (14)$$

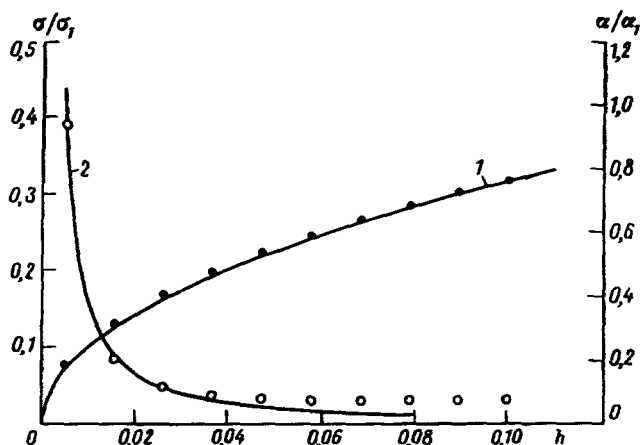
Будем интересоваться поведением характеристик среды при $h \ll 1$. Введем критические индексы соотношениями

$$\sigma_e \sim h^{u_2}, \quad \langle e^2 \rangle \sim h^{-\epsilon_2}, \quad a_e \sim h^{-u_4}, \quad \langle e^4 \rangle \sim h^{-\epsilon_4}. \quad (15)$$

Значения $u_2 = 1/2$ и $\epsilon_2 = 1/2$ найдены Дыхне (см. (1), (2)). Из неравенств (11) и (14) следуют неравенства для критических индексов:

$$u_4 \geq 1, \quad \epsilon_4 \geq 1. \quad (16)$$

Для определения критических индексов было выполнено прямое численное моделирование зависимости нелинейной проводимости и корреляторов полей от параметра h . Возможность моделирования системы на пороге протекания при конечных h основана на следующих соображениях. Каждую компьютерную реализацию системы на конечной решетке можно рассматривать как фрагмент фрактала. Роль характерного масштаба неоднородности в режиме смешанной проводимости играет длина $l \sim h^{-\nu/2t}$ [5], где $t/\nu = 0,97$ [1, 2]. Если размер фрагмента превышает l , то уже внутри него произойдет эффективное усреднение вычисляемых величин. В наших численных экспериментах максимальная сторона квадрата расчетной сетки составляла 100 постоянных решеток, поэтому минимально допустимое значение h было $\sim 10^{-4}$. Разностные уравнения, получающиеся из (4), решались итерационным методом [10]. Трудности расчетов обусловлены тем, что при малых h время релаксации системы к равновесию аномально растет и, как следствие, растет число требуемых итераций. В связи с этим максимальный размер расчетной сетки в наших экспериментах не превышал 100×100 узлов. Для достижения относительной точности расчета потенциала $\sim 10^{-6}$ на такой сетке требовалось $\sim 10^5$ итераций. Чтобы сгладить влияние флуктуаций, проводилось усреднение по 10 реализациям. В качестве теста использовались известные значения



Зависимости σ_e и α_e от h : \bullet – результат численного расчета зависимости σ_e от h для сетки размером 100×100 узлов и кривая 1, построенная согласно точной формуле $\sigma_e = \sigma_1 h^{1/2}$; \circ – результат численного расчета зависимости α_e от h и 2 – кривая $\alpha_e = \alpha_1 h^{-1,33}$

критических индексов u_2 и ϵ_2 . Зависимости σ_e и α_e от h представлены на рисунке. В результате расчетов получены следующие значения критических индексов: $u_2 = 0,49 \pm 0,04$, $\epsilon_2 = 0,48 \pm 0,03$, $u_4 = 1,33 \pm 0,05$, $\epsilon_4 = 1,33 \pm 0,05$.

Таким образом, показано, что нелинейная проводимость вблизи порога протекания нетривиально зависит от отношения линейных проводимостей. Это свойство указывает на новую возможность управления нелинейной проводимостью смесей металл–диэлектрик, что позволит создавать искусственные нелинейные среды с заданными свойствами. Отметим, что характерное поле проявления нелинейных эффектов также стремится к нулю при приближении к порогу протекания. В работе установлена зависимость эффективной нелинейной проводимости от отношения линейных проводимостей и вычислены критические индексы, определяющие эту зависимость.

Работа поддержана РФФИ (код 93-02-1478) и грантом Госкомитета РФ по высшему образованию (94-31.4-20).

1. Е.Федер, Фракталы, М.: Мир, 1991.
2. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос, Электронные свойства легированных полупроводников, М.: Наука, 1979.
3. S.Halvin and R.Nossal, J. Phys. A 17, L427 (1984).
4. S.Halvin, R.Nossal, B.Trus, and G.H.Weiss, J. Phys. A 17, L957 (1984).
5. P.Ohtsuki and T.Keyes, J. Phys. A 17, L559 (1984).
6. А.М.Дыхне, ЖЭТФ 59, 110 (1970).
7. A.Aharony, Phys. Rev. Lett. 58, 2726 (1987).
8. D.Stroud and P.M.Hui, Phys Rev. B 37, 8719 (1988).
9. П.Пенфилд, Р.Спейс, С.Дюинкер, Энергетическая теория электрических цепей, М.: Энергия, 1974.
10. S.Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. 45, 574 (1973).