Письма в ЖЭТФ, том 62, вып.4, стр.318 - 323 © 1995г. 25 августа

ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА СВЕРХРЕШЕТКАМИ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ: ПРЕДЕЛ СИЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

С.Н.Молотков

Институт физики твердого тела РАН

142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 21 июня 1995 г.

После переработки 17 июля 1995 г.

Показано, что в скрещенных электрическом и магнитном полях в пределе сильного электрического поля (режим ванные-штарковской лестницы) магнитное поле при любой величине играет роль малого возмущения. Электрическое поле приводит к разрушению сложной структуры спектра в магнитном поле. Роль магнитного поля сводится к слабой модуляции ванные-штарковской лестницы в зависимости от номера уровня. Показано также, что коэффициент межзонного поглощения света, в отличие от предела слабых полей, не имеет экспоненциальной малости с ростом электрического поля. Предсказываемые особенности доступны прямой экспериментальной проверке на полупроводниковых сверхрешетках.

Межзонное поглощение света в области края фундаментального поглощения в полупроводниках в скрещенных электрическом и магнитном полях впервые исследовалось в работе Аронова [1]. Влияние магнитного поля на эффект Франца–Келдыша [2, 3] (поглощение в области частот ниже края собственного поглощения) исследовалось Ароновым и Пикусом [4].

При поглощении в объемном однородном полупроводнике всегда реализуется случай слабых полей. Слабость электрического поля означает, что не происходит разрыва объемных зон на дискретные уровни (квантование Ванные–Штарка [5–7]). В этом случае для вычисления поглощения достаточно приближения эффективной массы, либо приближения эффективной массы в рамках двухзонной схемы [4]. Магнитное поле также считается слабым, ларморовская энергия существенно меньше ширины разрешенной зоны (на ячейку кристалла приходится величина потока магнитного поля существенно меньше одного кванта).

Характерной особенностью коэффициента межзонного поглощения света (I) в слабых скрещенных полях является экспоненциальная зависимость от параметра α:

$$I \propto \exp(-\alpha^2),$$

где $\alpha = eEl_m/\hbar\omega_c$, $\omega_c = eH/c(m_e + m_h)$ – циклотронная частота, $m^*_{e,h}$ – эффективные массы электрона и дырки, $l_m = (\hbar c/eH)^{1/2}$ – магнитная длина. Поглощение исчезает в пределе $E \to \infty$, подобное предельное поведение является результатом приближения эффективной массы.

В данной заметке показано, что в пределе сильных полей коэффициент поглощения не стремится к нулю и не имеет никакой специальной малости в пределе $E \to \infty$. Предел сильных полей реально недостижим для однородного полупроводника, но легко достижим в полупроводниковых сверхрешетках (см., например, [8]), где ширину минизоны (t) можно сделать достаточно малой

($t \ll edE$, d – период сверхрешетки). При этом оказывается, что в пределе сильного электрического поля магнитное поле при любой его величине (даже когда ларморовская энергия порядка ширины минизоны) играет роль малого возмущения.

В пределе сильных полей недостаточно приближения эффективной массы, поскольку требуется информация о спектре по всей разрешенной зоне. Для этих целей удобен метод сильной связи. Будем рассматривать следующую модель. Пусть исходный спектр сверхрешетки такой, что ширина первых минизон в валентной зоне и зоне проводимости меньше расстояния по энергии до соседних минизон. Это позволит пользоваться при описании спектра в минизонах однозонным приближением. Предел сильных полей в этом случае означает, что поля велики в энергетическом масштабе минизоны. Явления, связанные с многозонностью (магнитный пробой, межзонное туннелирование), требуют отдельного рассмотрения.

Для простоты будем рассматривать двумерную сверхрешетку (сверхрешетка в двух направлениях, минизона как вдоль оси x, так и y, этот факт будет использоваться в дальнейшем). Наличие третьей координаты, перпендикулярной плоскости, не принципиально, так как задача однородна в этом направлении). Пусть в каждой изолированной квантовой яме имеется один размерно-квантованный уровень $\varepsilon_{c,v}^{(0)}$ для зоны проводимости и валентной зоны. Перескоки между ямами описываются интегралами перекрытия $t_{c,v}$. Эта величина определяет ширину минизоны и знак эффективной массы вблизи экстремумов. Пусть однородное электрическое поле направлено по оси x, а магнитное – по нормали к плоскости оси z. Электрическое поле учитывается через сдвиг уровней в ямах. Изменение интеграла перескока под действием электрического поля не учитывается, поскольку принципиально не меняет результатов. Действие магнитного поля на волновую функцию учитывается введением оператора магнитной трансляции [9–15], действие которого сводится к следующему:

$$\hat{T}_{\boldsymbol{d}}\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d})\exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{r}\left[\frac{e\boldsymbol{H}}{\hbar c},\boldsymbol{d}\right]\right). \tag{1}$$

Для вектор-потенциала используется калибровка Ландау $\boldsymbol{A} = H(0, x, 0)$.

Для волновой функции возникает эффективное уравнение Шредингера

$$(\varepsilon_{c,v}^{(0)} + edmE - \varepsilon)\psi_{c,v}(x,y) + t_{c,v}[\psi_{c,v}(x+d,y) + \psi_{c,v}(x-d,y) +$$

$$+ \exp\left(-i\frac{eHdx}{\hbar c}\right)\psi_{c,v}(x,y+d) + r\exp\left(i\frac{eHdx}{\hbar c}\right)\psi_{c,v}(x,y-d)] = 0, \tag{2}$$

где координаты x, y принимают дискретные значения на узлах $x = md$ и $y = nd$, d – период сверхрешетки (считая его одинаковым вдоль осей x, y).

Как было показано (Азбель [14], Hofstadter [15]), в отсутствие электрического поля особенности спектра определяются безразмерным параметром $\alpha = ed^2H/2\pi\hbar c$ – число квантов магнитного потока через элементарную ячейку. Оператор магнитной трансляции затрагивает только координату x, поэтому вдоль оси y естественно считать, что

$$\psi_{c,v}(md, nd) = \exp(ik_y nd)A_{c,v}(m). \tag{3}$$

Эффективное уравнение Шредингера принимает вид

$$A_{c,v}(m+1)+A_{c,v}(m-1)+[2\cos(2\pi m\alpha-k_yd)+f_{c,v}m]A_{c,v}(m)=\varepsilon A_{c,v}(m), \tag{4}$$

где $f_{c,v}=edE/t_{c,v}$, $\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon^{(0)}_{c,v}/t_{c,v}$, далее для удобства будем полагать $\hbar=1$. В отсутствии электрического поля ($f_{c,v}=0$) рекуррентные уравнения при произвольном α численно исследовались в работе [15]. Аналитически нам удалось показать, что при малых α (слабые магнитные поля) спектр представляет из себя серию эквидистантных уровней Ландау. Действительно, при малых α, считая индекс m непрерывной переменной, вместо разностного уравнения получаем дифференциальное уравнение Матье (при $k_y=0$ - -в экстремуме зон)

$$\frac{1}{4}\frac{d^2A(z)}{dz^2}+(\gamma-4q\cos(2z))A(z)=0, \tag{5}$$

где

$$z=\frac{m}{(\pi\alpha)^2},\quad \gamma=(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2t_{c,v}})\frac{1}{(\pi\alpha)^2},\quad q=\frac{1}{8(\pi\alpha)^2}\gg 1.$$

– слабое магнитное поле. Используя асимптотику для собственных значений уравнения Матье при больших значениях параметра q [16], имеем

$$\gamma_\nu\approx-4q+\nu\sqrt{2q}. \tag{6}$$

Спектр представляет собой серию эквидистантных уровней. В отсутствие магнитного поля спектр электронов и дырок ($k_y=0$) имеет вид

$$\varepsilon=\varepsilon^{(0)}_{c,v}+2t_{c,v}\cos(k_xd). \tag{7}$$

В окрестности экстремумов зоны проводимости и валентной зоны $k_x\approx 0$ имеем

$$\varepsilon=\varepsilon^{(0)}_{c,v}+2t_{c,v}\mp t_{c,v}d^2k_x^2.$$

Знак интегралов перекрытия $t_{c,v}$ определяет знак эффективной массы носителей, поэтому для зоны проводимости $t_c<0$ ($m_c^*=1/t_cd^2>0$), а для валентной зоны $t_v>0$ ($m_v^*=1/t_vd^2<0$). Величина $\varepsilon_g^{(0)}=\varepsilon_c^{(0)}+2t_c-(\varepsilon_v^{(0)}+2t_v)$ играет роль запрещенной зоны в отсутствие внешних полей.

Для спектра электронов и дырок в слабом магнитном поле получаем

$$\varepsilon_c\approx-2|t_c|+\nu\frac{eH}{m_c^*c},$$

$$\varepsilon_v\approx 2t_v+\nu\frac{eH}{m_v^*c}.$$

Энергия нулевых колебаний из-за асимптотического характера разложения к сожалению не воспроизводится.

В отсутствие магнитного поля спектр системы также может быть найден точно, так как рекуррентные уравнения при $\alpha=0$ совпадают с рекуррентными соотношениями для функций Бесселя [16, 17], имеем

$$\varepsilon_{c,v\nu}=\varepsilon^{(0)}_{c,v}+edE\nu+2t_{c,v}\cos(k_yd), \tag{8}$$

и собственные функции

$$\psi_{c,v\nu}(m,n) = \exp(ik_y dn) J_{m-\nu}(1/f_{c,v}). \tag{9}$$

Существенно для дальнейшего, что при $edE \gg t_{c,v}$ расстояние между уровнями в ванньe-штарковской лестнице больше ширины исходной минизоны. В этом случае магнитное поле при любой его величине играет роль малого возмущения. Магнитное поле входит в уравнения (2), (4) через фазовые множители в интегралах перескока, поэтому энергетический масштаб возмущения от магнитного поля не превышает ширину исходной разрешенной зоны ($t_{c,v}$), то есть действие магнитного поля приводит к модификации спектра в пределах исходной минизоны ($2t_{c,v}$). Поэтому в режиме Ваннье-Штарковской лестницы магнитное поле может быть учтено по теории возмущений (величина возмущения существенно меньше расстояния между уровнями). Для матричного элемента возмущения между состояниями ν, λ (8) находим

$$V_{c,v\nu\lambda} = 4\sum_{m,n} t_{c,v}\psi_{c,v\nu}(m,n)\psi_{c,v\lambda}(m,n)\cos(2\pi\alpha m - k_y d) = \tag{10}$$

$$= 4t_{c,v} J_{\nu-\lambda}(2\sin(\pi\alpha)\cos[2\pi\alpha\nu + (\nu-\lambda)\arcsin(\cos(\pi\alpha)) - k_y d],$$

где использовалась формула суммирования для функций Бесселя [18].

Таким образом, в сильном электрическом поле сложная структура спектра из-за наличия магнитного поля (Hofstadter butterfly [15]) разрушается и вырождается в эквидистантную лестницу уровней, промодулированную в зависимости от номера, причем амплитуда модуляции мала по сравнению с расстоянием между соседними уровнями в лестнице без магнитного поля, имеем

$$\varepsilon_{c,v\nu} = \varepsilon^{(0)}_{c,v} + edE\nu + 2t_{c,v} J_0(2\sin(\pi\alpha))\cos(2\pi\alpha\nu - k_y d). \tag{11}$$

При малых полях ($\alpha \ll 1$) поправка к спектру линейна по магнитному полю

$$\delta\varepsilon_{c,v\nu} = 2t_{c,v}\sin(k_y d)\frac{ed^2 H}{c}\nu, \quad \alpha\nu \ll 1. \tag{12}$$

Поправка к волновой функции ν-го состояния равна

$$\delta\psi_{c,v}(m,n) = \exp(ikdn)\sum_{\lambda\neq\nu}\frac{V_{\nu\lambda}}{edE(\nu-\lambda)} J_{m-\lambda}(\frac{1}{f_{c,v}}), \tag{13}$$

и имеет порядок малости $t_{c,v}/edE \ll 1$.

Коэффициент поглощения света может быть представлен в виде (поправку $\delta\psi$ (12) можно не учитывать по параметру $1/f_{c,v} \ll 1$)

$$I(\omega) = d_0^2\sum_{\lambda,\mu}\int dk_y J^2_{\lambda-\mu}(\frac{1}{f_{cv}})\times \tag{14}$$

$$\times\ \delta[\omega - \varepsilon_g - edE(\lambda-\mu) - 2J_0(2\sin(\pi\alpha))(t_c\cos(2\pi\alpha\lambda - k_y d) - t_v\cos(2\pi\alpha\mu - k_y d))];$$

здесь d_0 – межзонный дипольный матричный элемент на атомных орбиталях базиса сильной связи, $\varepsilon_g = \varepsilon^{(0)}_c - \varepsilon^{(0)}_v$ – расстояние между исходными размерно-квантованными уровнями в изолированных ямах (без учета перескоков между ямами) в зоне проводимости и валентной зоне (не путать с энергией запрещенной зоны с учетом перескоков в $\varepsilon_g^{(0)}$).

В отсутствие магнитного поля коэффициент поглощения представляет собой серию ступенек, отвечающих переходам между уровнями в ванньe-штарковской лестнице в валентной зоне и зоне проводимости

$$I(\omega) = \frac{d_0^2}{d} \sum_{\lambda,\mu} J^2_{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{f_{cv}}\right) \frac{\theta[\omega - \varepsilon_g - edE(\lambda-\mu)]\theta\{t_{cv}^2 - [\omega - \varepsilon_g - edE(\lambda-\mu)]^2\}}{\sqrt{t_{cv}^2 - [\omega - \varepsilon_g - edE(\lambda-\mu)]^2}}, \quad (15)$$

где $1/f_c v = 1/f_c - 1/f_v$, $t_{cv} = 2(t_c - t_v)$ и $\theta(x)$ – ступенчатая единичная функция.

При больших полях E $(1/f_{cv} \ll 1)$ асимптотика функций Бесселя [16] дает

$$J_\nu\left(\frac{1}{f}\right) \propto \frac{1}{\Gamma(|\nu|+1)} \exp\left(-|\nu| \ln(|f|)\right).$$

Переходы имеют место между уровнями происходящими из ближайших соседних квантовых ям в сверхрешетке. Корневая особенность возникает из-за одномерного характера спектра в сильном электрическом поле. Для вертикальных в координатном пространстве переходов $(\lambda = \mu)$ особенность имеет место на краях разрешенных зон. Поглощение отсутствует, если частота превышает ширины разрешенных зон плюс исходное расстояние между размерно-квантованными уровнями в зоне проводимости и валентной зоне $(\omega > 2t_{cv} + \varepsilon_g)$.

В магнитном поле для коэффициента поглощения получается следующее выражение:

$$I(\omega) = \frac{d_0^2}{d} \sum_{\lambda,\mu} J^2_{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{f_{cv}}\right) \frac{\theta[\omega - \varepsilon_g - edE(\lambda-\mu)]\theta\{\tilde{t}_{cv}^2 - [\omega - \varepsilon_g - edE(\lambda-\mu)]^2\}}{\sqrt{\tilde{t}_{cv}^2 - [\omega - \varepsilon_g - edE(\lambda-\mu)]^2}}, \quad (16)$$

$$\tilde{t}^2_{cv\lambda\mu} = 4J_0^2(2\sin(\pi\alpha))\left\{[t_c\cos(2\pi\alpha\lambda) - t_v\cos(2\pi\alpha\mu)]^2 + [t_c\sin(2\pi\alpha\lambda) - t_v\sin(2\pi\alpha\mu)]^2\right\}.$$

Магнитное поле приводит к эффективному изменению ширины разрешенной зоны. В слабых магнитных полях сдвиг по частоте для переходов между парой уровней λ и μ в валентной зоне и зоне проводимости линеен по магнитному полю и пропорционален $\propto (t_c\lambda - t_v\mu)ed^2H/c$.

Таким образом, коэффициент поглощения в сильных электрических полях $(eEd/t_{c,v}\alpha \gg 1)$ не имеет никакой специальной малости в отличие от случая слабых полей, когда справедливо приближение эффективной массы. Предсказываемые особенности электронного спектра и поглощения в сильных скрещенных электрическом и магнитном полях доступно прямой экспериментальной проверке на полупроводниковых сверхрешетках.

Здесь рассматривалась двумерная решетка. Для трехмерной решетки качественные результаты не изменяются, так как вдоль оси z движение является свободным. При этом коэффициент поглощения выражается через эллиптические интегралы и корневая особенность заменяется логарифмической.

Выражаю благодарность С.В.Иорданскому и С.С.Назину, а также участникам теоретического семинара ИФТТ РАН за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-02-06108).

1. А.Г.Аронов, ФТТ **5**, 552 (1963).
2. Л.В.Келдыш, ЖЭТФ **34**, 1138 (1958).
3. W.Franz, Z. Naturforsch **13a**, 484 (1958).
4. А.Г.Аронов, Г.Е.Пикус, ЖЭТФ **51**, 505 (1966).
5. F.Bloch, Z.Phys. **52**, 555 (1928).
6. H.M.James, Phys. Rev. **76**, 1611 (1949).
7. G.Wannier, Phys. Rev. **117**, 432 (1960).
8. E.E.Mendez, 20th Intern. Conf. on the Physics of Semiconductors, **2**, 1990, p.1206.
9. R.E.Peierls, Z. Phys. **80**, 763 (1933).
10. J.M.Luttinger, Phys. Rev. **84**, 814 (1951).
11. W.Kohn, Phys. Rev. **115**, 1460 (1959).
12. G.H.Wannier, Rev. Mod. Phys. **34**, 645 (1962).
13. E.L.Blount, Phys. Rev. **126**, 1636 (1962).
14. М.Я.Азбель, ЖЭТФ **46**, 927 (1964).
15. D.R.Hofstadter, Phys. Rev. **B14**, 2239 (1976).
16. Janke-Emde-Lösch, Tafeln, Höherer Funktionen Seschste Auflage Neubearbeitet von F.Lösch, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960.
17. H.Fukuyama, R.A.Bari, and H.C.Fogedby, Phys. Rev. **B8**, 5579 (1973).
18. А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Марычев, *Интегралы и ряды (специальные функции)*, М.: Наука, 1983.