Письма в ЖЭТФ, том 62, вып.4, стр.358 - 363 

# ОСОБЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ТИПИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ САМОПРОИЗВОЛЬНОГО ПАДЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ В НЕУСТОЙЧИВЫХ СРЕДАХ

*В.Р.Кудашев, Б.И.Сулейманов*

*Институт математики с ВЦ, Уфимский научный центр РАН*

*450000 Уфа, Россия*[1]

Поступила в редакцию 5 апреля 1995 г.

После переработки 1 июня 1995 г.

Приводятся результаты локального анализа процессов самопроизвольного падения интенсивности, имеющих место в неустойчивых средах в приближении нелинейной геометрической оптики для ситуаций "общего положения". Установлено, что этим процессам соответствуют типичные для гладких отображений особенности складок и сборок. Показано, что при учете влияния малой дисперсии в окрестности точек самообострения импульс описывается нелинейной спецфункцией – изомонодромным решением нелинейного уравнения Шредингера.

1. При исследовании волновых процессов в неустойчивых средах широко используется [1–4] система уравнений нелинейной геометрической оптики ($\rho \geq 0$, $\alpha(\rho) > 0$ и $\alpha(\rho) = 4 + \alpha_1\rho + \alpha_2\rho^2 + \ldots$ при $\rho \to 0$)

$$\rho_T + (\rho v)_X = 0, \qquad v_T + vv_X - \alpha(\rho)\rho_X = 0. \tag{1}$$

От уравнений обычной гидродинамики эта система отличается знаком давления – оно здесь сжимает поток. Поэтому для ее решений типичны не бегущие волны, а дробления на разделенные пустыми промежутками ($\rho = 0$) самостягивающиеся сгустки [1]. Специфичны для решений (1) и другие особенности, исследование которых было начато в [4].

В настоящей статье основное внимание будет посвящено локальному анализу процесса провального самообострения, характерному для импульсов "общего положения". В разделе 2 будет показано, что при этом процессе эволюция импульсов в окрестности точек самообострения определяется решением кубического уравнения, соответствующего универсальной для гладких отображений особенности сборки [5]. Согласно приводимым ниже формулам (6)–(11) провал, возникающий в первоначальный момент в виде точки, начинает расширяться. На его двух границах амплитуда импульса имеет при этом особенность складки [5]. С течением времени естественно ожидать появления все новых таких провалов, которые также начинают расширяться, что находится в полном соответствии с общей тенденцией к образованию из решений (1) отдельных сгустков.

Понятно, что гладкость при провалах интенсивности теряется лишь в приближении нелинейной геометрической оптики. В реальных же ситуациях импульсы остаются гладкими, и их исследование в окрестности особых точек решений (1) необходимо дополнить.

В разделе 3–6 настоящей работы устанавливается, что при учете малой дисперсии для широкого ряда явлений импульс в окрестности точек самообостре-

[1]e-mail: vadkud@nkc.bashkiria.su

ния задается специальным изомонодромным решением нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).

2. Особенностью нашего подхода является его *локальность*. В отличие от предшествующих работ, мы совсем не используем явные, до конца определенные решения системы (1). Для нас важно лишь то, что систему уравнений нелинейной геометрической оптики локально можно, как и в гидродинамике, свести к линейной, рассматривая $T$ и $X$ как координаты, а $\rho$ и $v$ – как независимые переменные:

$$X_\rho = \alpha(\rho)T_v + vT_\rho, \qquad X_v = vT_v - T_\rho. \tag{2}$$

Для нас будет удобно, следуя, например, [2,с.18], посредством соотношений

$$T = B_v, \qquad X = -B - \rho B_\rho + vB_v \tag{3}$$

свести (2) к одному линейному уравнению на $B(v,\rho)$:

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho + \alpha(\rho)B_{vv} = 0. \tag{4}$$

Значение $\rho = 0$ является особым для уравнения (4). Потеря гладкости в точках $(v,0)$ решениями (4) может, конечно, сопутствовать падению интенсивности до нуля. Однако, по-видимому, эти потери гладкости либо несущественны ($\rho^{-1}$ есть точное решение (4)), либо происходят при бесконечно больших $T$ и $X$. Поэтому мы будем рассматривать процессы падения интенсивности, определяемые только гладкими при $\rho \to 0$ функциями $B(v,\rho)$, которые, с учетом (4), разлагаются в окрестностях $(v_*,0)$ в следующие ряды Тейлора:

$$B = (T_* v_* - X_*) + T_*(v - v_*) + b_{01}[\rho - (v - v_*)^2/4] + b_{11}(v - v_*)[\rho - (v - v_*)^2/12] +$$
$$+ \ b_{02}\rho^2 - (12b_{02} - \alpha_1 b_{01})(v - v_*)^2\rho/16 + b_{12}(v - v_*)\rho^2 + b_{03}\rho^3 + \dots \tag{5}$$

(точки $(T_*,X_*)$ соответствуют расположенным на плоскости годографа точкам $(v_*,0)$).

Если якобиан $J(v,\rho) = T_vX_\rho - T_\rho X_v = \alpha(\rho)(T_v)^2 + \rho(T_\rho)^2$ не обращается в точке $(v_*,0)$ в нуль, то коэффициент $b_{01} = -2T_v(v_*,0)$ ряда (5) отличен от нуля, и после замены

$$(T - T_*) = \tau, \qquad (X - X_*) - (T - T_*)v_* = \xi \tag{6}$$

подстановка (5) в (3) дает соотношения

$$\xi = -2b_{01}\rho + \dots, \qquad \tau = -b_{01}(v - v_*)/2 + b_{11}\rho + \dots \tag{7}$$

Первое из соотношений (7) показывает, что в этом случае амплитуда импульса $\rho^{1/2}$ в точке $\xi = 0$ имеет особенность типа квадратного корня. И из таких точек состоит вся *неособая* часть линии провала интенсивности $T = T(X)$:

$$T = B_v(v,0), \qquad X = -B(v,0) + vB_v(v,0). \tag{8}$$

При этом значения $\xi/b_{01} > 0$ соответствуют, очевидно, области нулевой интенсивности.

Однако ясно, что при эволюции изначально гладких импульсов провалы интенсивности в момент их возникновения могут иметь место лишь в *отдельных* точках. Согласно же (7), необходимым условием изолированности точек провала является равенство $b_{01} = J = 0$ (на кривой провала (8) эти точки являются точками заострения, так как в них $T_v = X_v = 0$). Подстановка, с учетом этого равенства, (5) в (3) дает соотношения

$$\xi - \tau(v - v_*) + b_{11}(v - v_*)[2\rho - (v - v_*)^2/12] + \ldots = 0,$$
$$\tau - b_{11}[\rho - (v - v_*)^2/4] + \ldots = 0, \tag{9}$$

определяющие эволюцию импульса в момент появления провала интенсивности. Рассматривая ситуацию "общего положения", коэффициент $b_{11}$ можно считать отличным от нуля. При этом предположении

$$\rho = \tau/b_{11} + (v - v_*)^2/4 + \ldots \tag{10}$$

и, значит (в силу неотрицательности интенсивности), $b_{11} < 0$. Из (9) и (10) следует, что в окрестности точек первоначального появления провала $v(T, X)$ приближенно задается решением уравнения

$$\xi + \tau(v - v_*) + 5b_{11}(v - v_*)^3/12 = 0, \tag{11}$$

определяющим особенность типа катастрофы сборки [5].

Таким образом, при малых $\tau > 0$ величина $\rho$ обращается в нуль на двух исходящих из точки возникновения провала кривых, расположенных *вне* области неоднозначности решения (11). На них, как нетрудно видеть, амплитуда имеет особенность типа квадратного корня.

З а м е ч а н и е 1. В [1,с.104] приводится пример решения (2), для которого вычислено, что при появлении провала интенсивность падает по закону $\rho \approx (X - X_*)^{2/3}$. Одним из частных следствий (10), (11) является и вывод о том, что в ситуации "общего положения" непосредственно в момент возникновения провала *происходит самообострение импульса* именно по этому закону. Но, конечно, основная ценность соотношений (7) – (11) состоит в том, что они описывают динамику провала по $T$.

3. Вопрос о влиянии дисперсии на поведение импульса в процессе "провала" приближения нелинейной геометрической оптики мы в этой статье будем рассматривать для уравнения

$$i\epsilon Q_T + \epsilon^2 Q_{XX} + K(|Q|^2)Q = 0 \tag{12}$$

($\epsilon \ll 1$, $K(0) = 0$, $K'(y) = \alpha(y)/2$), часто применяемого для описания различных нелинейных явлений в неустойчивых средах.

Приближение нелинейной геометрической оптики к решениям уравнения (12) получается при подстановке в него выражения

$$Q = \rho^{1/2} \exp\{i\varphi/\epsilon\} \tag{13}$$

и отбрасывании в результате членов порядка $O(\epsilon^2)$: система

$$\rho_T + 2(\rho\varphi_X)_X = 0, \qquad \varphi_T + (\varphi_X)^2 - K(\rho) = 0 \tag{14}$$

дифференцированием второго уравнения по $X$ сводится к (1) с $v = 2\varphi_X$.

Согласно методу согласования [6], правильное описание решений (12) в окрестности точек $(T_*, X_*)$ самообострений интенсивности, возникающих в приближении нелинейной геометрической оптики, осуществляется после масштабного преобразования

$$\xi = x\epsilon^{3/4}, \qquad \tau = t\epsilon^{1/2}, \qquad Q = q\epsilon^{1/4}.$$

(Его вид определяется требованиями учета всех выписанных членов в (10), (11) и сбалансированности дисперсии с нелинейностью в (12)). После этого преобразования (12) переводится в уравнение

$$i(q_t - v_*\epsilon^{-1/4}q_x) + q_{xx} + q(2|q|^2 + \epsilon^{1/2}\alpha_1|q|^4 + \ldots) = 0,$$

которое, в свою очередь, заменой

$$q = \exp\{i(-\epsilon^{-1/2}(v_*)^2t/4 + \epsilon^{-1/4}v_*x/2)\}p$$

сводится (в главном порядке по $\epsilon$) к интегрируемому методом обратной задачи рассеяния [7] НУШ

$$ip_t + p_{xx} + 2|p|^2p = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) еще нужно дополнить условием сшивки $p = b(t,x)\exp\{iS(t,x)\}$ с приближением нелинейной геометрической оптики (13), имеющим в точке $(T_*, X_*)$ особенность, описываемую формулами (10) и (11). Это условие мы приведем в терминах решения кубического уравнения

$$x + 2tu + 10b_{11}u^3/3 = 0, \tag{16}$$

переписанного в новых обозначениях с (11): при $x^2 + t^2 \to \infty$ асимптотики

$$b \approx (u^2 + t/b_{11})^{1/2}, \qquad S \approx \varphi(T_*, X_*)/\epsilon + [t^2/b_{11} + 5b_{11}u^3/6 + tu^2 + xu] + \ldots \tag{17}$$

должны быть справедливы вне области, ограниченной двумя ветвями полукубической параболы

$$\tau^3 = (-9b_{11}x^2/16). \tag{18}$$

(При выводе условий (17) надо помимо совершенно очевидного соотношения $S_x \approx u$ использовать второе из уравнений (14)). Эти ветви есть след линии (8), отделяющей "плохую" [5, с.32], "неустойчивую" область справедливости приближения нелинейной геометрической оптики от "хорошей", "устойчивой" области провала.

4. Рассматриваемое специальное решение НУШ оказывается обладателем следующего неочевидного свойства: наряду с (15) оно есть решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$p_{xxx} + 6|p|^2p_x - (4tp_x - 2ixp)/\beta = 0 \qquad (\beta = 4b_{11}/3), \tag{19}$$

$$p_{tt} = (4it/\beta + 2i|p|^2)p_t + (2i + 8t|p|^2)p/\beta + p_x(2ix/\beta + 2(p_xp^* - p_x^*p)),$$
$$(p_x)_t = 2xp/\beta + 4itp_x/\beta - 2i(p_xp^* - p_x^*p)p. \tag{20}$$

(Совместность (19), (20) с (15) гарантируется тем фактом, что (19) есть сумма стационарных частей коммутативной и классической (типа Галилея) симметрий НУШ [8]).

Замечательно, что этим же обыкновенным уравнениям удовлетворяет [9] и специальное решение НУШ из [10], которое описывает поведение около острия каустики быстроосциллирующих решений ряда дисперсионных уравнений с малой нелинейностью. Но, тем не менее, это *разные* решения (15), (19) и (20), отвечающие по своему происхождению прямо противоположным физическим ситуациям.

Для убывающего решения из [10] при $x^2+t^2 \to \infty$ дисперсия доминирует над нелинейностью. И, наоборот, для рассматриваемого нами растущего решения, на бесконечности (вне внутренности (18)) дисперсией в главном порядке можно пренебречь.

5. Подстановка $p = b\exp\{iS\}$ в (15), разделение в результате вещественной и мнимой частей дает, после однократного интегрирования вещественной части, следующую систему ОДУ четвертого порядка на амплитуду $b$ и производную фазы $f = S_x$:

$$b_{xx}b - (b_x)^2/2 = 3b^2[f^2 - b^2]/2 + 2tb^2/\beta + \mathrm{const},$$
$$f_{xx}b + 3f_xb_x + 3fb_{xx} = b[f^3 + 4tf/\beta - 6fb^2 - 2x/\beta]. \tag{21}$$

Отбрасывая соответствующую дисперсии левую часть (21), мы получим приближение $b^2 \approx f^2 + t/b_{11}$, $f \approx u$, удовлетворяющее условию (17). (Нужно еще учесть бездисперсионный предел НУШ (15)).

Замечание 2. При $\alpha \equiv 4$ данное приближение есть *точное* решение $\rho = \epsilon^{1/2}(u^2 + t/b_{11})$, $v = v_* + \epsilon^{1/2}2u$ системы нелинейной геометрической оптики (1), приведенное еще в [4]. Этот факт, обнаруженный с помощью "бездисперсионного" варианта [11] симметрийного подхода к изучению нелинейных спецфункций волновых катастроф [12], послужил отправной точкой для проведения всего данного исследования.

6. И рассматриваемое нами решение НУШ, и решение из [10] относятся к классу изомонодромных [13], так как наряду с общими для всех решений (15) уравнениями метода обратной задачи рассеяния [7]

$$\Psi_x\Psi^{-1} = U = -i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & p \\ p^* & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Psi_t\Psi^{-1} = 2\lambda U + i|p|^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p_x \\ -p_x^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

соответствующая им $\Psi$-функция есть решение ОДУ по параметру $\lambda$:

$$\Psi_\lambda\Psi^{-1} = [-i(4\beta\lambda^3 + 4\lambda t - 2\beta|p|^2\lambda + x) - \beta(p_xp^* - p_x^*p)]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$$
$$+ 4i\beta\lambda^2\begin{pmatrix} 0 & p \\ p^* & 0 \end{pmatrix} - 2\beta\lambda\begin{pmatrix} 0 & p_x \\ -p_x^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4itp - \beta p_t \\ 4itp^* + \beta p_t^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Так как для каждого сектора $S_j = \{\lambda : \pi(j-1)/4 < \arg\lambda < \pi(j+1)/4\}j = \overline{1,8}\}$ имеется [14, с.66] решение $\Psi_j$ системы (23), обладающее при $\lambda \to \infty$ в этом секторе асимптотикой $\Psi_j \approx \exp\{[-i(\lambda x + 2t\lambda^2 + \beta\lambda^4) + \gamma\ln\lambda]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$, то наше решение НУШ (как и решение из [10]) можно трактовать в качестве аналога интеграла Пирси $A = \int_R \exp\{-2i(x\lambda + 2t\lambda^2 + \beta\lambda^4)\}d\lambda$. (Эта трактовка естественна также потому, что $A(t,x)$ есть точное решение линейной части уравнений (15), (19), (20)).

Ввиду совместности (23) с (22) матрицы Стокса $M_k = (\Psi_k)^{-1}\Psi_{k+1}$ не зависят от $t$ и $x$. Эту инвариантность $M_k$ можно использовать для выяснения вопроса о поведении $p$ при $x^2+t^2 \to \infty$ и в "хорошей" области, расположенной внутри кривой (18), а также в ее окрестности. Что касается последней проблемы, то исходя из одних аналогий с [9], можно ожидать, что здесь $p$ должно задаваться с помощью решения ОДУ типа второго уравнения Пенлеве $g_{zz} = zg - 2|g|^2g$, являющегося нелинейным обобщением классической функции Эйри. Только в отличие от рассматриваемого в [9] решения, его амплитуда при $z \to \infty$ должна расти по закону $|g| \approx z^{1/2}$. (Такое решение существует [15].) Оно, вообще, должно играть ключевую роль в описании быстрого перехода от квазиклассического режима к области "нулевой" интенсивности, происходящего в окрестностях (шириной порядка $O(\epsilon^{2/3})$) ветвей кривой (8). В самой же области "нулевой" интенсивности естественней всего ожидать высокочастотных колебаний $Q$ с амплитудой $O(\epsilon^{1/2})$. (Но каких-либо точных результатов, касающихся учета дисперсии вне малых окрестностей точек $(X_*, T_*)$ пока не получено. Этот вопрос еще требует изучения).

В заключение – еще одно свойство $p$. В силу его очевидной четности по $x$, на прямой $x = 0$ (*страте Максвелла* [16] катастрофы сборки) (20) сводится к четвертому уравнению Пенлеве [17]. Этот факт подтверждает отмеченную в [18] особую роль стратов Максвелла, которую они имеют для спецфункций волновых катастроф.

Авторы провели настоящее исследование при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 93-011-16088 и 93-011-165). Второй из авторов был также поддержан Международным научным фондом (грант MB000).

---

1. С.К.Жданов, Б.А.Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, М.: Наука, 1991.
2. А.Б.Шварцбург, *Нелинейная геометрическая оптика в нелинейной теории волн*, М.: Наука, 1976.
3. К.А.Наугольных, Л.А.Островский, *Нелинейные волновые процессы в акустике*, М.: Наука, 1990.
4. А.В.Гуревич, А.Б.Шварцбург, ЖЭТФ **58**, 2012 (1970).
5. В.И.Арнольд, Теория катастроф, М.: Наука, 1990.
6. А.М.Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, М.: Наука, 1989.
7. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
8. А.Ю.Орлов, Е.И.Шульман, ТМФ **64**, 323 (1985).
9. Б.И.Сулейманов, Записки ЛОМИ **187**, 110 (1991).
10. R.Haberman and R.Sun, Studies in Appl. Math. **LXXII**, 39 (1985).
11. V.R.Kudashev, KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equation symmetries, Preprint Los Alamos Nonlinear Science PBB patt-soll/9404002, 1994; Интегрируемость в динамических системах, Уфа, **70**, (1994).
12. Б.И.Сулейманов, И.Т.Хабибуллин, ТМФ **97**, 213 (1993).
13. А.Р.Итс, Изв. АН СССР, сер. матем. **49**, 530 (1985).
14. В.Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Мир, 1968.
15. А.А.Капаев, ТМФ **77**, 323 (1988).
16. В.И.Арнольд, УМН **47**, 3 (1993).
17. A.V.Kitaev, J. Math. Phys. **35**, 2934 (1994).
18. Б.И.Сулейманов, ЖЭТФ **104**, 1089 (1994).