

СПИРАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ВИХРЯ В ТОКОНЕСУЩЕЙ ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ СВЕРХПРОВОДНИКА

Ю.А.Гененко¹⁾

Донецкий физико-технический институт А.А.Галкина НАН Украины
340114 Донецк, Украина

Поступила в редакцию 21 июля 1995 г.

На основе точного решения для винтового магнитного вихря Абрикосова в пластине сверхпроводника II рода исследована левоспиральная неустойчивость линейного вихря в планарном сверхпроводнике в магнитном поле, параллельном транспортному току. Показано, что в тонких пленках критический ток неустойчивости сравним с наблюдаемыми в эксперименте величинами и может определять резистивное поведение в широкой области полей.

Феномен спиральной неустойчивости вихря магнитного поля, параллельного транспортному току, впервые рассматривался Клемом [1]. Суть его заключается в том, что сила Лоренца, действующая на вихрь со стороны транспортного тока, стремится увеличить радиус левоспирального винтового вихря, в то время как внешнее магнитное поле и сила линейного натяжения вихря стремятся его уменьшить. В результате этой конкуренции возникает критический ток неустойчивости $j_{in}(H)$, при превышении которого линейный вихрь, параллельный току, становится неустойчивым относительно определенных левоспиральных флуктуаций, раздувается и выходит из образца. Данный эффект подобен "пробочной" неустойчивости продольного течения заряженной жидкости в магнитогидродинамике [1]. Позднее результат Клема был обобщен Брандтом на случай продольной решетки вихрей [2].

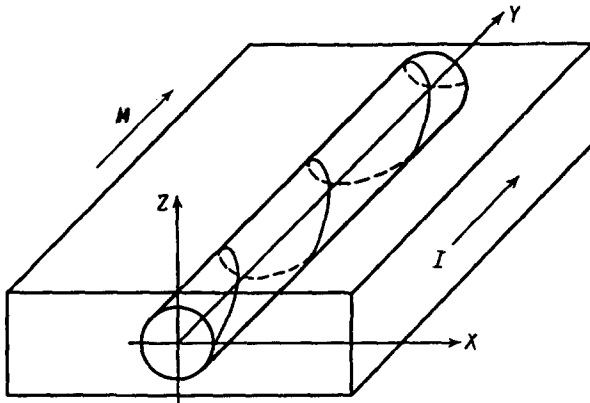
Значение данного феномена весьма велико, поскольку он позволяет построить непротиворечивую картину резистивного поведения сверхпроводника (СП) в магнитном поле, параллельном току, не выдвигая для этого экзотических механизмов диссипации [3] и не конструируя специальных "токонесущих" вихрей [4], а также объяснить осцилляции напряжения и продольного магнитного момента, наблюдаемые в эксперименте [5].

Поскольку транспортный ток, а значит и сила Лоренца, экспоненциально малы в глубине массивного СП, критический ток неустойчивости одиночного вихря оказывается экспоненциально большим и, стало быть, нефизическим (в отличие от неустойчивости решетки вихрей [2]). В образцах же пониженной размерности – тонких нитях и пленках – транспортный ток нигде не является малым и, следовательно, неустойчивость одиночного вихря может проявиться в широкой области полей. В последнем случае, однако, необходимо учитывать взаимодействие вихря с поверхностью образцов, чего не было сделано в ранних работах.

В работах [6,7] автором было получено в лондоновском приближении точное решение для спирального вихря в СП цилиндре произвольного радиуса и построена диаграмма резистивного состояния в координатах ток – поле, в случае

¹⁾e-mail: genenko@host.dipt.donetsk.ua

тонкого СП действительно определяемая феноменом неустойчивости. В настоящей работе рассматривается спиральный вихрь в токонесущей СП пластине в параллельном току магнитном поле. Найден критический ток неустойчивости одиночного вихря, который оказывается сравнимым с критическими токами пиннинга и проникновения вихрей через краевой (геометрический) барьер в тонких пленках [8]. Данный эффект является грубым в том же смысле, что и эффект геометрического барьера [8], то есть не зависит от деталей структуры СП пленки и качества ее краев и поверхности.



Спиральный магнитный вихрь, навитый на воображаемый цилиндр радиуса r , лежащий в нагруженной транспортным током I пластине сверхпроводника во внешнем магнитном поле H , параллельном току

Рассмотрим СП пластину, заполняющую пространство в пределах $|z| \leq d$, по которой в положительном направлении оси y протекает транспортный ток и к которой приложено параллельно поверхности в том же направлении внешнее поле H (см. рисунок). Полное магнитное поле в пластине складывается из мейсснеровского слагаемого, удовлетворяющего граничному условию $H_M = H$ на границах пластины $z = \pm d$, и собственно поля вихря h . Последнее удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} h + \lambda^2 \text{rot roth} &= \Phi, \quad |z| \leq d \\ \text{roth} &= 0, \quad |z| \geq d, \quad \text{div} h = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями непрерывности поля на границах пластины $z = \pm d$ и убыванием поля $h \rightarrow 0$ на бесконечности $z \rightarrow \infty$ либо $x \rightarrow \infty$. В первом уравнении (лондонов) в (1) λ – глубина проникновения магнитного поля в СП. Специальная правая часть Φ в уравнении Лондонов

$$\Phi = \Phi_0 \frac{e_1}{e_1 e_\varphi} \delta(\rho - r) \delta(y - L\varphi) \quad (2)$$

описывает вихревую спираль, навитую на воображаемый цилиндр радиуса r , ось которого совпадает с осью y . Φ удобно определить в цилиндрических координатах (ρ, φ, y) , где $\rho^2 = x^2 + z^2$, $\tan \varphi = z/x$, e_1 – единичный вектор, касательный к кору вихря, e_φ – единичный азимутальный вектор. Постоянный угол наклона спирали α к плоскости xz определяется соотношением $e_1 e_\varphi = \cos \alpha$, где $\tan \alpha = L/r$ и $2\pi L$ – высота витка спирали. При $r \rightarrow 0$ спираль вырождается в линейный вихрь, лежащий на оси y .

Ввиду периодичности задачи удобно перейти от уравнений (1) к уравнениям для фурье-компонент поля, которые можно определить соотношениями

$$h^i(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \exp(iky/L) \int dq h_k^i(q, z) \exp iqx. \quad (3)$$

Тогда уравнения (1) приобретут простой вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - p^2 \right) h_k^i(q, z) &= 0, \quad |z| \geq d, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Q^2 \right) h_k^i(q, z) &= f_k^i(q, z), \quad |z| \leq d, \end{aligned} \quad (4)$$

где $p^2 = q^2 + k^2/L^2$, $Q^2 = q^2 + k^2/L^2 + \lambda^{-2}$, а $f_k^i(q, z) = -\lambda^{-2} \Phi_k^i(q, z)$.

Решение уравнений (4) вне пластины тривиально и определяется экспонентами, убывающими на бесконечности:

$$h_k^i(q, z) = h_k^i(q, \pm d) \exp[p(d \mp z)], \quad z \geq d \quad (z \leq -d). \quad (5)$$

Решения уравнений (4) внутри пластины находим по общему методу решения неоднородных уравнений второго порядка [9]:

$$\begin{aligned} h_k^i = C_+^i \exp Qz + C_-^i \exp(-Qz) - \frac{\Phi_0 \theta(z-r)}{4\pi Q \lambda^2} [I_-^i(\pi/2) \exp Qz - I_+^i(\pi/2) \exp(-Qz)] - \\ - \frac{\Phi_0 \theta(r-|z|)}{4\pi Q \lambda^2} [I_-^i(T) \exp Qz - I_+^i(T) \exp(-Qz)], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$I_{\pm}^i(T) = \int_{-\pi-T}^T dt \phi_i(t) \exp(-ikt - iqr \cos t \pm Qr \sin t), \quad (7)$$

а $\phi_x = -(r/L) \sin t$, $\phi_y = 1$, $\phi_z = (r/L) \cos t$, $T = \arcsin z/r$.

Для нахождения 12 неизвестных констант C_{\pm}^i , $h_k^i(q, \pm d)$ имеются 6 граничных условий для непрерывности компонент поля при $z = \pm d$. Недостающие уравнения для определения решения можно получить, пользуясь вторым и третьим из уравнений (1) внутри и снаружи пластины и линейной независимостью решений $\exp(\pm Qz)$. Окончательно можно найти следующие выражения для констант в (6):

$$\begin{aligned} C_{\pm}^i = \frac{\Phi_0}{4\pi Q \lambda^2} [I_-^i(\pi/2) \exp Qz - I_+^i(\pi/2) \exp(-Qz)] + g_{\pm}^i - \\ - \frac{\Phi_0 r}{4\pi \lambda^2 L} \frac{[Q \cos h2Qd + p \sin h2Qd] I_{\pm}^i(\pi/2) + Q I_{\pm}^i(\pi/2)}{[(Q^2 + p^2) \sin h2Qd + 2Qp \cos h2Qd]} f_{\pm}^i, \end{aligned} \quad (8)$$

где $g_{\pm}^x = g_{\pm}^y = 0$, $g_{\pm}^z = (\Phi_0 r / 4\pi Q \lambda^2 L) I_{\pm}^z(\pi/2) / \sin h2Qd$, $f_{\pm}^x = \pm iq/p$, $f_{\pm}^y = \pm ik/pL$, $f_{\pm}^z = p/Q$. Выражения (5) – (8) дают полное описание поля, создаваемого спиральным вихрем в пространстве.

Для изучения устойчивости линейного вихря, лежащего на оси y , относительно спиральных искажений необходимо вычислить свободную энергию

Гиббса системы с учетом работы, производимой при изменении его радиуса источниками постоянного магнитного поля и транспортного тока. В духе работы [10] эта энергия может быть представлена в виде

$$G = F - \Delta W_H \pm \Delta W_I, \quad (9)$$

где F – собственная энергия вихря, ΔW_H – работа источника поля, ΔW_I – работа источника тока. В последнем члене верхний знак отвечает право-, а нижний – левоспиральному вихрю.

Точное вычисление энергии F (определяемой обычным образом [11]) проблематично, однако для анализа устойчивости линейного вихря достаточно рассмотреть малые отклонения от положения равновесия при $r = 0$. При разложении по малым r достаточно удержать в выражении энергии члены до степени r^2 включительно и получить

$$F = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left[\ln \frac{d}{\xi} + \frac{r^2}{2L^2} \ln \frac{\lambda}{\xi} + \frac{r^2}{\lambda^2} - \frac{r^2}{2d^2} \right]. \quad (10)$$

Работа (на единицу длины пластины вдоль оси y), совершаемая источником поля, в простой геометрии пластины находится как

$$\Delta W_H = \frac{1}{2\pi L} \frac{1}{4\pi} \int dV h H = \frac{H \Phi_y(r)}{4\pi}, \quad (11)$$

где Φ_y – поток, протекающий через вихрь в направлении оси y . В формуле (11) учитывается только вклад в энергию, зависящий от положения вихря, поэтому мейсснеровское слагаемое опущено. Поток Φ_y может быть найден при помощи выражений для поля (5)–(6) как интеграл от y -компоненты поля по любой плоскости $y = \text{const}$. Легко убедиться, что результат не зависит от значения y и равен

$$\Phi_y(r) = \Phi_0 \left[1 - \frac{I_0(r/\lambda)}{\cos hd/\lambda} \right], \quad (12)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [12]. Данный результат совпадает при $r \rightarrow 0$ с результатом Шмидта [13].

Работа источника транспортного тока ΔW_I может быть найдена прямым вычислением работы силы Лоренца, действующей на вихрь со стороны транспортного тока, $f_L = [j\Phi]/c$. Плотность транспортного тока j имеет только одну компоненту – вдоль оси y . Поскольку угол между током j и локальным направлением элемента длины вихря e_I остается постоянным, эта сила равна по модулю $f_L = (j\Phi_0/c) \cos \alpha$ (на единицу длины) и направлена к оси симметрии пластины $x = z = 0$. Тогда сила, действующая на элемент длины вихря dI , $f_L dl = (j\Phi_0/c) dl \cos \alpha = (j\Phi_0/c) r d\varphi$. Таким образом, работа, необходимая для растягивания одного витка спирали до радиуса r , равна

$$\Delta G_I = \int_0^r d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{j\Phi_0}{c} = \frac{I(r)\Phi_0}{c}, \quad (13)$$

где $I(r)$ – ток, протекающий через сечение πr^2 внутри вихревой спирали.

Если пластина имеет макроскопическую толщину, $d \gg \lambda$, то ток $I(r)$ будет экспоненциально мал, как и в случае макроскопического цилиндра. Это приведет точно так же к экспоненциально большим значениям тока спиральной неустойчивости. Поэтому далее обратимся к случаю тонкой пленки с $d \leq \lambda$. В этом случае транспортный ток I распределен однородно по толщине пластины, а распределение его по ширине пластины W дается формулой [14]

$$j(x) = \frac{I}{\pi d \sqrt{W^2 - x^2}}. \quad (14)$$

Тогда для спирального вихря малого радиуса r , лежащего в центре пластины (в самом устойчивом положении), работа источника тока на единицу длины пластины составляет

$$\Delta W_I = \frac{\Delta G_I}{2\pi L} = \frac{I\Phi_0 r^2}{2\pi c d W L}. \quad (15)$$

Окончательно, гиббсовская энергия тонкой пластины с вихрем составляет (на единицу длины)

$$G = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \left[\ln \frac{d}{\xi} + \frac{r^2}{2L^2} \ln \frac{\lambda}{\xi} + \frac{r^2}{\lambda^2} \ln \frac{d}{\lambda} - \frac{r^2}{2d^2} \right] - \frac{H\Phi_0}{4\pi} \left[\frac{d^2}{2\lambda^2} - \frac{r^2}{4\lambda^2} \right] - \frac{I\Phi_0 r^2}{2\pi c d W L}. \quad (16)$$

Введем, как в [1], силу, действующую на единицу длины вихря, в виде $f = -\partial G/\partial r = rK(r, y)$, где переменная $y = \lambda/L$. Максимум $K(0, y)$ достигается при $y_0 = (\lambda/d)H_I/H_{c1}$, где $H_I = 2I/W_c$ - амплитуда собственного поля тока над центром пленки $x = 0$, $z = d$, H_{c1} - нижнее критическое поле объемного СП материала. Впервые эта величина становится положительной (и значит, вихрь - неустойчивым) при токе

$$I_{in} = \frac{cWdH_{c1}}{2\lambda} \sqrt{H - H_d/2H_{c1}}, \quad (17)$$

где $H_d = \Phi_0/2\pi d^2 - (\Phi_0/\pi\lambda^2) \ln \lambda/d$ - характерное поле, равное по порядку величины нижнему критическому полю пленки [13]. Максимальная плотность тока в реальной СП пленке достигается на краю при $|W - x| \approx d$. Пользуясь распределением тока по ширине пленки (14), оценим максимальное значение плотности тока как

$$j_{in} \cong j_{c1} \sqrt{(W/d)(H - H_d)/2H_{c1}}, \quad (18)$$

где характерный ток $j_{c1} = cH_{c1}/4\pi\lambda$ в тонких пленках имеет тот же порядок величины $\sim 10^6 \text{ A/cm}^2$, что и критический ток вхождения вихрей через геометрический барьер $j_c = cH_{c1}/2\pi d$ [8], согласующийся с экспериментальными данными.

В отличие от макроскопического случая ток неустойчивости (18) не является экспоненциально большим и соизмерим с критическими токами другой природы - барьерной, пиннинговой, наблюдаемыми на реальных пленках. Следовательно, он в такой же мере определяет их резистивное поведение. В частности, в широкой надкритической области полей и токов можно ожидать осциллирующего поведения продольного магнитного момента и напряжения с небольшим числом характерных частот, обусловленного вхождением вихрей в образец и последующим выходом из него неустойчивых вихревых спиралей [1,7]. Подобные осцилляции наблюдались на макроскопических образцах

СП II рода [5]. Представляет интерес частотный анализ токового шума в продольном магнитном поле, который может выявить характерные частоты в процессе диссипации и тем самым пролить свет на механизм этого процесса в продольном поле.

Автор выражает благодарность профессорам Дж.Р.Клему (J.R.Clem), Э.Х.Брандту (E.H.Brandt), Г.К.Фрайхардту (H.C.Freyhardt) и В.М.Пану за многочисленные плодотворные дискуссии. Работа выполнена при поддержке германского фонда DAAD и ГКНТ Украины.

-
1. J.R.Clem, Phys. Rev. Lett. **38**, 1425 (1977).
 2. E.H.Brandt, Phys. Lett. **A79**, 207 (1980); Phys. Rev. **B25**, 5756 (1982).
 3. K.Kadowaki, Y.Songliu, and K.Kitazawa, Supercond. Sci.Technol. **7**, 519 (1994).
 4. G.E.Marsh, Phys. Rev. **B50**, 571 (1994); **B49**, 450 (1994).
 5. D.G.Walmsley and W.E.Timms, J. Phys. **F7**, 2373 (1977).
 6. Ю.А.Гененко, Письма в ЖЭТФ **59**, 807 (1994).
 7. Yu.A.Genenko, Phys. Rev. **B51**, 3686 (1995).
 8. E.Zeldov, A.I.Larkin, V.B.Geshkenbein et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 1428 (1994).
 9. Э.Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1971 [E.Kamke, *Differentialgleichungen*, Leipzig, 1959].
 10. J.R.Clem, R.P.Huebener, and D.E.Gallus, J. Low Temp. Phys. **12**, 449 (1973).
 11. M.Tinkham, *Introduction to superconductivity*, New-York, McGraw-Hill, 1975).
 12. *Handbook of Mathematical Functions*, Eds. M.Abramoviz, I.Stegun, Washington, US GPO, 1965.
 13. В.В.Шмидт, ЖЭТФ **61**, 398 (1971).
 14. А.И.Ларкин, Ю.И.Овчинников, ЖЭТФ **61**, 1221 (1971).