

## ФРАКТАЛЬНО-ПЕРКОЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕНЫ

Ю.В.Пахаруков<sup>1</sup>, Шевнина Т.Е.

Тюменский государственный нефтегазовый университет  
625000 г.Тюмень, Россия

Поступила в редакцию 11 мая 1999 г.

Рассмотрена фрактально-перколяционная модель пены, описывающая ее устойчивость, в которой системе разветвленных каналов ставится в соответствии фрактальное дерево. Разрушение пены в предложенной модели развивается по масштабно-инвариантному механизму переноса нагрузки. Получены формула для расчета высоты  $n$ -го уровня фрактального дерева. Определена критическая высота пенного столба. Результаты сопоставлены с данными экспериментов.

PACS: 83.70.Nq

Исследование газожидкостных пен как сред динамической природы с конечным числом степеней свободы имеет важное практическое значение. Несмотря на это, до сих пор нет теоретической модели, удовлетворительно описывающей всю совокупность свойств пен. Авторам представляется, что такая модель должна строиться на основе параметров, отражающих их структуру.

В данной работе рассматривается фрактально-перколяционная модель пены, описывающая ее устойчивость. За основу взята полиэдрическая модель [1], в которой полиэдрические пузырьки разделены тонкими пленками, каналами и узлами, при этом объем жидкости в узлах считается пренебрежимо малым. В предлагаемой модели системе разветвленных каналов ставится в соответствие фрактальное дерево [2], у которого из каждой вершины (узла) выходят два ребра (стык пленок), образующие между собой угол  $\theta = 120^\circ$ . На  $n$ -м уровне существует  $2^n$  ребер, соединяющих каждую вершину  $(n - 1)$ -го порядка с двумя вершинами  $n$ -го порядка. Высота  $n$ -го уровня равна  $h_n = h_1/2^{n-1}$ , а высота всего дерева будет

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} h_n = 2h_1.$$

Средняя нагрузка на каждое ребро  $n$ -го уровня составляет  $P_n = P \cos(\theta/2)/2^n$ , где  $P$  – вертикальная нагрузка, приложенная к уровню  $n = 0$ .

Обычно разрушение пены связывается с процессами вытекания жидкости, которые складываются из протекания по случайным узлам. Среднее число узлов в единице объема задано геометрией фрактального дерева. Следовательно, разрушение пены будет совпадать с вероятностью смачивания бесконечного числа узлов  $\rho^{(b)}$  в задаче протекания [3,4]. Вероятность  $\rho^{(b)}$  получается из вероятности  $\rho_n^{(b)}$  смачивания, по крайней мере  $n$  узлов, предельном переходе  $\rho^{(b)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{(b)}$ . Вероятность  $\rho_n^{(b)}$  можно определить, вычисляя долю объема, попадающего внутрь сферы радиусом  $h/2$  на пороге протекания.

<sup>1</sup>) e-mail: pakharukov@mailcity.com

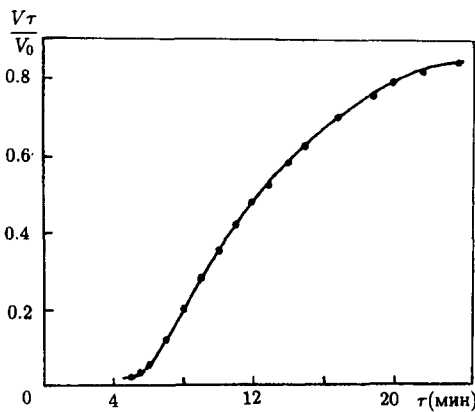


Рис.1. Кривая вытекания жидкости из пенного столба [1]

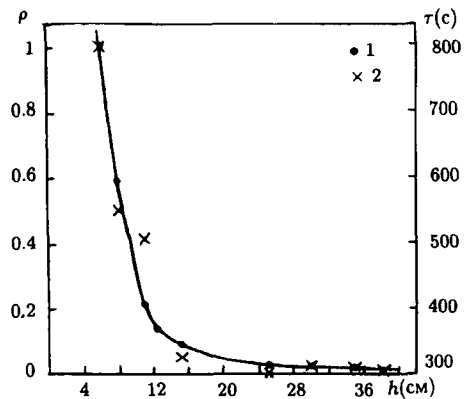


Рис.2. Зависимость вероятности разрушения (●) и времени начала вытекания жидкости (×) от высоты пенного столба

Разрушение пены в предлагаемой модели развивается по масштабнo-инвариантному механизму переноса нагрузки: если жидкость прорывается через  $n$ -й узел, то приложенная нагрузка переносится на соседний узел  $(n - 1)$ -го уровня. Это дает возможность получить рекуррентное соотношение для вероятности разрушения пены по аналогии с распределением нагрузки по фрактальному дереву:

$$\rho_{n-1} = 2\rho_n[1 - (1 - \rho_n)^{2m}] - \rho_n^2, \quad (1)$$

где  $m$  – порядок распределения. В результате получается  $S$ -обратная зависимость, характерная для процессов протекания. В работе [1] была получена экспериментальная кривая, описывающая вытекание жидкости из пены (рис.1). Как видно, вид этой кривой действительно имеет  $S$ -образную зависимость. Используя результаты модели и экспериментальные данные [1], можно определить критические значения для давления, при котором развивается процесс разрушения:

$$P_c = \left[ \frac{\ln 2}{2^2 - 1} \right]^{1/2} P_{0n} = 0.48 P_{0n}. \quad (2)$$

Здесь  $P_{0n}$  – нагрузка, приходящаяся на ребра  $n$ -го уровня, равная

$$P_{0n} = P_b - \frac{K_1 \sigma}{2.5 r_0 \sqrt{\gamma}}, \quad (3)$$

где  $P_b = 2\sigma/r_0$  – давление газа в смежном пузырьке;  $r_0$  – радиус эквивалентного пузырька;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $K_1$  – коэффициент, определяемый моделью пенной структуры (для пентагондодекаэдрической модели  $K_1 = 1.53$ );  $\gamma$  – объемная плотность пены.

Процесс перераспределения жидкости в пенах (синерезис) широко изучался в ряде работ [1, 5–7]. Было показано, что время начала вытекания жидкости ( $\tau_n$ ) может зависеть от высоты пенного столба лишь до определенного значения (рис.2). Этот экспериментальный результат до сих пор не имеет удовлетворительного теоретического объяснения. На рис.3 приведены те же экспериментальные результаты, но в

иной зависимости, рассмотрена вероятность начала вытекания жидкости  $\rho \sim \tau_0/\tau_n$  от высоты пенного столба ( $\tau_0$  – время, определяющее момент вытекания жидкости вне зависимости от высоты пенного столба). График имеет явно перколяционную природу [3,4]:

$$\rho \sim (P - P_c(h))^\beta, \quad (4)$$

где  $P$  – давление в пенном канале,  $P_c(h)$  – критическое давление (порог протекания),  $\beta$  – критический индекс протекания.

Определим порог протекания  $h_c$  для нагруженного фрактального дерева. Если дисперсность во всем объеме пены не меняется, то радиус пузырьков  $r_0$  и давление газа в них  $P_b$  постоянны и от координаты  $z$  не зависят (считаем, что ось  $z$  направлена вертикально вверх). Пусть на уровне  $n$  движения жидкости в пенных каналах нет, то есть установилось гидростатическое равновесие, определяемое условием

$$\partial P_{on}/\partial z + \rho g = 0, \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости. Подставив выражение (3) в (5), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{K_1 \sigma}{5r_0 \gamma^{3/2}} \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (6)$$

решением которого является зависимость объемной плотности пены от высоты  $n$ -го уровня:

$$\gamma_n = \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} - \frac{\rho g h_n \cdot 2.5r_0}{K_1 \sigma} \right)^{-2}, \quad (7)$$

где  $\gamma_{n+1}$  – объемная плотность на  $(n + 1)$ -м уровне.

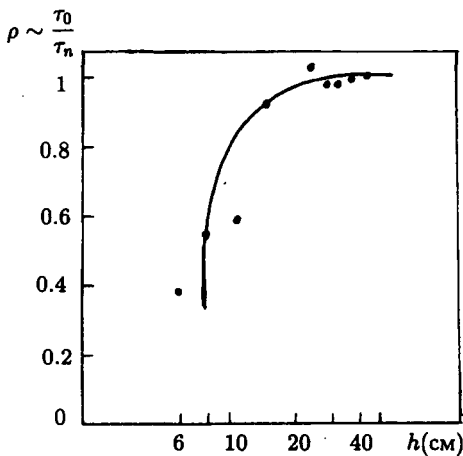


Рис.3. Зависимость вероятности начала вытекания жидкости от высоты пенного столба в полулогарифмическом масштабе

Из условия (7) с учетом (3) можно получить выражения для расчета давления в пенном канале на уровне  $n$  и высоту  $n$ -го уровня:

$$P_{on} = P_b - \frac{K_1 \sigma}{2.5r_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} - \frac{\rho g h_n \cdot 2.5r_0}{K_1 \sigma} \right], \quad (8)$$

$$h_n = \frac{K_1 \sigma}{2.5 r_0 \rho g} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} - \frac{1}{\rho g} [P_b - P_{on}]. \quad (9)$$

Предложим, что приложенная нагрузка на ребра  $n$ -го уровня равна критической:

$$P_c = \frac{P \cos(\Theta/2)}{2^n}. \quad (10)$$

С учетом выражений (2) и (10) давление  $P_{on}$  имеет следующий вид:

$$P_{on} = \frac{P \cos(\theta/2)}{0.48 \cdot 2^n}, \quad P = 2 \frac{\sigma}{r_0}. \quad (11)$$

Это позволяет получить формулу для расчета высоты  $n$ -го уровня:

$$h_n = \frac{K_1 \sigma}{2.5 r_0 \rho g} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} - \frac{2\sigma}{\rho g r_0} \left[ 1 - \frac{\cos(\theta/2)}{0.48 \cdot 2^n} \right]. \quad (12)$$

Оценим критическую высоту пенного столба, учитывая, что вся высота нагруженного фрактального дерева составляет

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} h_n = 2h_1$$

Высота первого уровня  $h_1$  для пены с  $r_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  м;  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>;  $K_1 = 1.53$ ;  $\theta = 120^\circ$ , средней кратностью  $K = 1/\gamma = 70$  составляет 0.064 м. Тогда критическая высота столба пены равна  $H = 0.128$  м. Полученный результат хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис.3).

Таким образом, в рамках фрактально-перколяционной модели удалось получить адекватное описание процесса перераспределения жидкости в пене, а также объяснить наличие критической высоты как порога протекания.

1. К.Б.Канн, *Капиллярная гидродинамика пен*, Новосибирск: Наука, 1989.
2. С.Солла, в кн. *Фракталы в физике*, под ред. Л.Пьетронеро, Э.Тозатти, М.: Мир, 1988, с.255.
3. Е.Федер, *Фракталы*, М.: Мир, 1991.
4. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*, М.: Наука, 1979.
5. А.Г.Ветошкин, Теор. основы хим. технол. **29**, 463 (1995).
6. Е.И.Васильев, С.Ю.Митичкин, В.Г.Тестов и др., *ЖТФ* **76**, 1 (1997).
7. В.А.Куликовский, С.Ю.Митичкин, В.Г.Тестов и др., *ЖТФ* **66**, 1 (1996).