

"ДИКАЯ СФЕРА" КОРРЕЛЯЦИЙ*А.С.Зельцер, А.Э.Филиппов**Донецкий физико-технический институт НАН Украины
340114 Донецк, Украина*

Поступила в редакцию 6 июля 1995 г.

После переработки 29 августа 1995 г.

Исследована тонкая структура пространственной дисперсии двухточечной корреляционной функции флуктуирующего поля в критической точке. Показано численно, что формирование "нитевидной" крупномасштабной пространственной структуры этого поля приводит к тому, что фурье-образ его корреляционной функции оказывается существенно изрезанным (фрактальным) в области малых импульсов. Установлено, что такая тонкая структура корреляционной функции является физической причиной нецелочисленной (аномальной) размерности сглаженной корреляционной функции, описываемой в аналитической теории критическим индексом Фишера η .

Введение. Корреляционные функции случайных полей являются одними из наиболее важных характеристик флуктуирующих систем. Они определены как средние по ансамблю от произведений полевых переменных в разных точках пространства $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \varphi(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}') \rangle$. Исходя из гипотезы о самоусредняемости таких величин, принято считать, что эти средние хорошо аппроксимируются решениями оборванных систем зацепляющихся уравнений, связывающих функции различных порядков [1-4]. Получаемые так решения должны быть верифицированы, то есть пространственные корреляции должны действительно спадать настолько быстро (экспоненциально), чтобы обеспечить искомое самоусреднение. Один из физически наиболее интересных - случай системы в точке фазового перехода второго рода, однако, не таков. Корреляционные функции спадают здесь степенным образом, и соответствующие системы уравнений оборваны быть не могут [3].

Тем не менее, основанный на огрубленном описании ренормгрупповой (РГ) подход дает очень хорошие аппроксимации для критических индексов, и в частности, для индекса Фишера η , описывающего в критической точке асимптотическое поведение фурье-образа $G(q) \propto q^{\eta-2}$ двухточечной корреляционной функции $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. В РГ появление нецелочисленной "аномальной размерности" $0 \leq \eta \leq 1/4$ связывается с генерацией нелокальных ренормировок функционала Гинзбурга-Ландау [1-5]. Естественно, она не сводится только к изменению асимптотики, но и сказывается на всей структуре $G(q)$ в критической точке [5].

Изменение корреляционных функций в РГ протекает в абстрактном пространстве параметров функционала и фиктивном "ренормгрупповом времени". Несмотря на уже длительное существование флуктуационной теории фазовых переходов [1], прояснение физических механизмов генерации аномальных размерностей представляется по-прежнему актуальным. Этому вопросу и посвящена настоящая заметка.

Модель и результаты. Мы будем основываться на решении кинетического уравнения для флуктуирующего поля параметра порядка, что в известной степени альтернативно редукции описания в методе РГ. При достаточно последовательном проведении такого подхода предполагается, что выведенный

из микроскопии (см., например, [4, 5]) функционал Гинзбурга–Ландау

$$\mathcal{H}[\varphi] = \int d^d r \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + F(\varphi) \right] \quad (1)$$

(в d -мерном пространстве) неизменен, тогда как все эффекты ренормировок его флуктуациями получаются "сами собой" в результате решения кинетического уравнения для параметра порядка

$$\partial \varphi(\mathbf{r}, t) / \partial t = c \Delta \varphi - \partial F / \partial \varphi + \xi(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

при условии $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ в момент $t = 0$ "включения" случайного источника $\xi(\mathbf{r}, t)$

$$\langle \xi(\mathbf{r}, t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(\mathbf{r}, t) \xi(\mathbf{r}', t') \rangle = D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (3)$$

Уравнение (2) и уравнение РГ решаются приближенно, но на феноменологическом уровне результаты обоих подходов должны совпасть [6].

Точное вычисление, пусть даже и с использованием локальной свободной энергии $F(\varphi)$, в критической области требует бесконечного численного массива и не может быть выполнено. Однако важные для понимания особенности критического поведения можно выявить с использованием следующей аппроксимации.

Будем полагать, что бесконечное количество мелкомасштабных флуктуирующих мод уже отсуммировано и учтено перенормировкой эффективной локальной формы $F(\varphi) \rightarrow F_{eff}(\varphi)$. В этом контексте достаточно адекватным ситуации является использование для вычисления $F_{eff}(\varphi)$ локальной версии точного уравнения РГ [7]:

$$\partial f / \partial l = \hat{R} f = df + \Delta_{\varphi} f - \frac{d-2}{2} \nabla_{\varphi} f - (\nabla_{\varphi} f)^2 \quad (4)$$

в предположении, что $F_{eff}(\varphi)$ совпадает с его неподвижной точкой $f^* = F_{eff}(\varphi)$. Вместе с тем, не следует забывать, что сама по себе терминология $F_{eff}(\varphi)$ весьма условна, поскольку редуцирует описание системы в $(d \cdot n)$ -мерном пространстве $\{\varphi, \nabla \varphi\}$ (где n – число компонент параметра порядка) к чисто локальному (n -мерному) пространству $\{\varphi\}$. То, что будет сделано ниже, и есть учет подпространства $\{\nabla \varphi\}$ [6]. Далее в этой заметке мы для простоты ограничимся четной $f(\varphi) = f(\varphi^2)$ и скалярной ($n = 1$) версией модели.

В широкой области температур (даже вне строгой масштабной инвариантности) функция $f(l) = \sum g_{2k}(l) \varphi^{2k}$ имеет бесконечное количество ненулевых коэффициентов g_{2k} . За вычетом перенормировки температуры T_c (то есть $g_2 \varphi^2$) соответствующая эффективная свободная энергия $F_{eff}(\varphi^2)$ монотонна и аномально полого по сравнению с моделью φ^4 . Ввиду ее монотонности, нелинейные возбуждения типа зародышей при переходе первого рода (ФП1) невыгодны. Тем не менее, такие возбуждения являются здесь долгоживущими образованиями, аппроксимирующими реальные распределения $\varphi(\mathbf{r})$, близкие к выполнению условия $\delta \mathcal{H} / \delta \varphi = 0$ и, следовательно, релаксирующие чрезвычайно медленно. Как и при ФП1, эти образования стихийно возникают из произвольного флуктуирующего поля, формируя при этом волокнистую структуру [8–10].

Можно показать, что при подстановке в уравнение для $\partial \varphi / \partial t$ неподвижного функционала f^* в качестве эффективного функционала свободной энергии в

критической точке релаксация поля $\varphi(\mathbf{r})$ приводит к простому масштабному преобразованию распределения $\exp\{-\mathcal{H}[\varphi]\}$ во времени [7]. Система порождает все более крупные организованные структуры. Корреляционные функции не только приобретают скейлинговую форму (то есть в среднем степенным образом зависят от расстояния), но и должны из-за этого перестать быть самоусредняющимися величинами, то есть сохранять память о структурированности поля.

Для практического расчета функцию $F_{eff}(\varphi^2)$ можно использовать как в форме найденного из уравнения (4) численного массива, так и в виде функции, приближенной паде-аппроксимантами:

$$F_{eff}(\varphi^2) \approx (a_1 + a_3\varphi^2 + a_5\varphi^4 + \dots)/(a_2 + a_4\varphi^2 + a_6\varphi^4 + \dots). \quad (5)$$

Уже низжайшее нетривиальное приближение $a_1 = a_3 = a_{2k>4} = 0$, $a_5, a_2, a_4 \neq 0$ дает относительную точность порядка $10^{-3} \div 10^{-2}$. Соответствующие численные расчеты были выполнены нами. Они привели, к структуре фурье-образа корреляционной функции, показанной с помощью линий уровня на рис.1 (для одной типичной реализации распределения $\varphi(\mathbf{r})$). Как и ожидалось, из-за аномально медленного спада корреляций $G(q)$ сохраняет память о структурированности поля. Изрезанность каждой линии уровня (постоянной величины $G(q) = \bar{G}$) сопоставима со средним значением радиуса q , соответствующим данному \bar{G} . Это хорошо видно на левой части рис.1, на которой данная выборка значений $G(q)$ показана в зависимости от модуля $q = (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$.

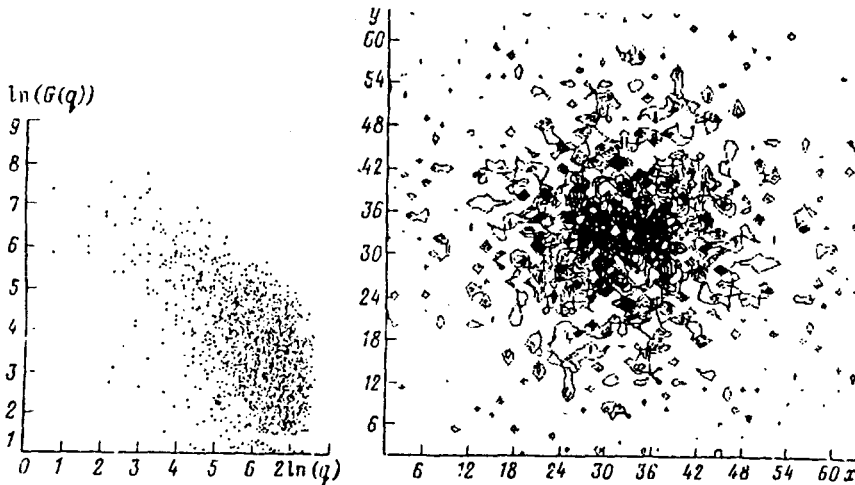


Рис.1. Карта линий уровня фурье-образа корреляционной функции $G(q)$. Слева в двойном логарифмическом масштабе показано распределение значений G в зависимости от абсолютного значения радиуса $q = (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$

Влияние фрактальности на структуру $G(q)$ можно охарактеризовать следующим образом. Заметим, что в теории среднего поля $G(q) \propto 1/q^2$. Поскольку длина окружности с данным значением $G(q) = \bar{G}$ пропорциональна q , то число состояний $n(q)$ с данным $G(q) = \bar{G}$ должно бы быть пропорционально $G(q)^{-1/2}$. Рис.2 в двойном логарифмическом масштабе воспроизводит зависимость $n(q)$ от $G(q)$, полученную в действительности. Совпадая с прямой

$\ln(G) = -2\ln(n) + \text{const}$ при больших q , при малых q эта зависимость сильно изрезана. Конкретный рисунок изрезанности специфичен для каждой конкретной реализации. Однако, что собственно и существенно, зависимость $n(G(q))$ имеет знакоопределенное отклонение от искомой прямой. Последнее означает, что размерность линий $G(q) = \bar{G}$ при малых q всегда повышена по сравнению с "наивной размерностью", равной единице.

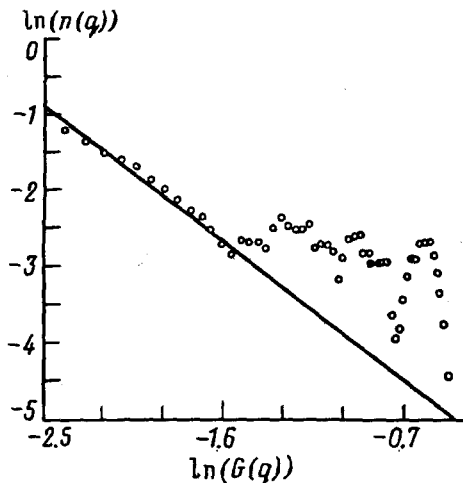


Рис.2. Связь между плотностью состояний $n(q)$ и корреляционной функцией $G(q)$. Прямая соответствует зависимости $\ln(G(q)) = \ln(n(q)) + \text{const}$

Отфильтрованная по малым масштабам импульсов функция $G(q)$ должна оказаться такой же, как в РГ теории, то есть $G(q) \propto 1/q^{2-\eta}$ [1-5]. На рис.3 и вставке к нему отфильтрованная G -функция представлена в тех же обозначениях, что и исходная на рис.1. Кроме того, на левой части рисунка изображены прямые, соответствующие в двойном логарифмическом масштабе среднеполевой зависимости $G(q) \propto 1/q^2$ (штриховая линия) и скейлинговой формуле. Величина η выбрана равной $1/4$, то есть известному значению при размерности $d = 2$ [1-5, 11].

Структурированность $G(q)$ отражает в конечном счете эффект градиентных членов в энергии, поскольку (квази-) низкоразмерность возбуждений понижает вклад от некоторых из компонент градиентов, малых вдоль складок плотности $\varphi(r)$ [10]. Этот эффект приводит к снижению эффективной размерности флуктуаций и, в конечном счете, к аномальной размерности G .

Численные эксперименты показывают, что аналогичная структурированность поля имеет место в трехмерном пространстве. Линии постоянного G превращаются здесь в плотно изрезанные (вплоть до $q = 0$) поверхности, похожие на описанную математиками так называемую "дикую сферу" [12].

В этом контексте следует отметить, что аналогичные фрактальные свойства фазовых переходов были ранее обнаружены численно также для изинговских кластеров в рамках подходов, альтернативных обычной теории, основанной на поле параметра порядка [13, 14]. Результаты, получаемые методом Монте-Карло и на основе функционала Гинзбурга-Ландау, взаимно подтверждают и дополняют друг друга. Кроме того, нам удалось проследить, каким образом изрезанность флуктуирующего поля трансформируется в огрубленные характеристики аналитической теории, например, в аномальную размерность η . В частности, можно ожидать, что поскольку понижение энергии при $d = 3$ связано также с (квази-) двумерными фрагментами структуры, соответствующий эф-

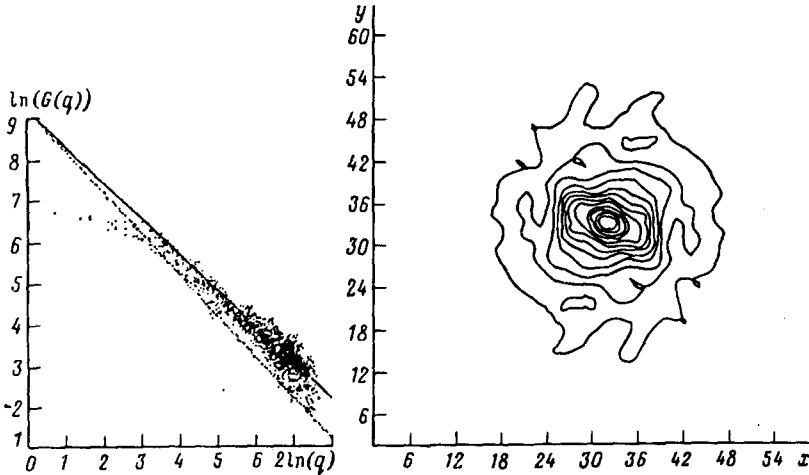


Рис.3. То же, что и на рис.1, для функции $G(q)$, сглаженной по малым импульсам. Прямые штриховая и сплошная линии на левой части рисунка показывают зависимости $\ln(G) = -2\ln(q) + \text{const}$ и $\ln(G) = -7\ln(q)/4 + \text{const}$, соответственно

факт изменения размерности выражен относительно слабее. Последнее должно быть тесно связано с меньшей величиной $\eta \approx 0.03$ при $d = 3$ [1–5]. Мы рассчитываем в дальнейшем проверить это утверждение.

Авторы глубоко признательны И.М.Резнику, любезно предоставившему возможность проведения численных экспериментов на компьютере класса 486DX4/100, что позволило выполнить необходимый объем расчетов. Мы также благодарим Ю.Е.Кузовлева, созданный которым пакет пользовательских математических программ был частично использован при обработке численных массивов во время работы над настоящей статьей.

Настоящая работа поддержана фондом International Science Foundation – Ukraine. Grant K 58100.

1. К.Вильсон, Дж.Когут, *Ренормализационная группа и ϵ -разложение*, М.: Мир, 1975.
2. Ш.-К.Ма, *Современная теория критических явлений*, М.: Мир, 1980.
3. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, М.: Наука, 1982.
4. Ю.А.Изюмов, Ю.Н.Скрябин, *Статистическая механика магнитоупорядоченных систем*, М.: Наука, 1987.
5. Ю.М.Иванченко, А.А.Лисянский, А.Э.Филиппов, *Флуктуационные эффекты в системах с конкурирующими взаимодействиями*, Киев: Наукова Думка, 1989.
6. А.С.Зельцер, А.Э.Филиппов, *ЖЭТФ* **108**, N 10 (1995).
7. А.Е.Филиппов, *J.Stat.Phys.* **75**, (1/2), 241 (1994).
8. Т.М.Рогерс, К.Р.Элдер, и Р.С.Дesai, *Phys. Rev. B* **37**, 9638 (1988).
9. К.Р.Элдер и Р.С.Дesai, *Phys. Rev. B* **40**, 243 (1989).
10. Ю.Е.Кузовлев, Т.К.Соболева, А.Э.Филиппов, *ЖЭТФ* **103**, 1742 (1993).
11. А.М.Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **12**, 538 (1970).
12. В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович, *Наглядная топология*, М.: Наука, 1982.
13. V.Dotsenko and A.Polyakov, In: *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Eds. by M.Jimbo et al. (Academic, New York, 1988), vol. 16.
14. V.Dotsenko, P.Windey, G.Harris et al., *Phys. Rev. Lett.* **71**, 811 (1993).