Письма в ЖЭТФ, том 62, вып.8, стр.644 - 648 © 1995г. 25 октября

ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕЛАКСАЦИИ ЛЕГГЕТТА – ТАКАГИ ВО ВСЕМ ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР ДЛЯ ^{3}He-B

А.В.Маркелов

Институт физических проблем РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 июня 1995 г.
После переработки 21 сентября 1995 г.

Приводится выражение для релаксации Леггетта – Такаги при произвольной величине $\omega_L\tau$ что позволяет охватить весь интервал температур для ^{3}He-B.

В данной работе мы рассмотрим следующую задачу. Известно, что релаксация моды Бринкмана – Смита в B-фазе ^{3}He в гидродинамической области мала в меру малости величины τ (времени релаксации квазичастиц), а в бесстолкновительной области также мала в меру малости τ^{-1}. В гидродинамической области существует выражение для времени релаксации моды Бринкмана – Смита, справедливое в области $\omega_L\tau \ll 1$ [1]. Это условие соответствует области температур вблизи температуры сверхпроводящего перехода. В то же время, получено выражение для релаксации моды Бринкмана – Смита в бесстолкновительной области, когда справедливо условие $\omega_L\tau \gg 1$ [2]. Это условие означает применимость в области температур вблизи нуля Кельвина. В промежуточной, наиболее интересной области температур, когда справедливо условие $\omega_L\tau \sim 1$, формул для затухания прецессии нелинейного ЯМР получено не было. Настоящая заметка призвана восполнить этот пробел.

В общем случае задача вычисления времени релаксации нелинейного ЯМР, исходя из нелинейного кинетического уравнения, чрезвычайно сложна. Однако в нашем случае мы имеем существенное упрощение. Дело в том, что для углов отклонения $\beta < \beta_L$ (угла Леггетта) в ^{3}He-B происходит ларморовская прецессия без сдвига частоты прецессии. Спин квазичастиц когерентно вращается вместе со спином конденсата, на который не действуют в этом случае дополнительные дипольные силы. Поэтому в области $\beta < \beta_L$ решением кинетического уравнения будет равновесная функция распределения. При малых превышениях угла β над β_L возникнут дипольные силы, которые будут уводить спин конденсата от спина квазичастиц, но эти силы будут малы в меру малости $\Delta\beta = \beta - \beta_L$. Поэтому неравновесная добавка к функции распределения будет также мала в меру малости $\Delta\beta = \beta - \beta_L$. Чтобы найти эту неравновесную добавку и получить выражение для эффективной величины релаксации моды Бринкмана – Смита, исходим из совместной системы трех уравнений [3,4]. Это гидродинамическое уравнение на полный спин

$$\dot{\mathbf{S}} = \gamma[\mathbf{S}\mathbf{H}] + \mathbf{R}_d, \tag{1}$$

уравнение движения параметра порядка

$$\dot{\mathbf{d}}(\mathbf{p}) = [\mathbf{d}(\mathbf{p}), \quad \{\gamma\mathbf{H} - \gamma^2(\frac{Z_0}{4\chi_{n0}}\mathbf{S} + \frac{1}{\chi_{p0}}\mathbf{S}_p)\}], \tag{2}$$

нелинейное кинетическое уравнение

$$\delta\dot{\vec{\nu}}_k(\mathrm{r},t) + (\nabla_k E_k \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}})\delta\vec{\mu}_k(r,t) + \delta\vec{\mu}_k(\mathrm{r},t) \times \delta\mathrm{E}_k(\mathrm{r},t) = \mathrm{I}(\delta\vec{\nu}_k), \tag{3}$$

$$\delta\vec{\mu}_k(\mathrm{r},t) = \delta\vec{\nu}_k(\mathrm{r},t) - \frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\delta\mathrm{E}, \qquad \varphi_k = -\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta E_k,$$

$$\delta\mathrm{E}_k = k_i\mathrm{A}_i + \frac{\xi_k}{E_k}\mathrm{X} - (1 - \frac{\xi_k}{E_k})\mathrm{d}_k[\mathrm{d}_k(k_i\mathrm{A}_i - \mathrm{X})], \qquad \mathrm{X} = \mathrm{V} - \vec{\Omega} - f_0^a\mathrm{S}.$$

Уравнения (1), (3) являются соответственно гидродинамическим уравнением на полный спин и кинетическим уравнением для квазичастиц. Они справедливы всегда. Уравнение (2) получено в [4] для движения параметра порядка с учетом некоторых допущений. Одним из таких допущений, при которых справедливо уравнение (2), является рассмотрение почти периодических решений, когда время эффективной релаксации этих решений больше обратной частоты. В этом случае уравнение (5.34) из [4] можно подставить в (5.33) и получить (5.35) или в нашем случае уравнение (2). В нашем случае, как следует из (15), $\delta\dot{\beta}/\omega_L \ll 1$ и реализуется именно рассмотренный нами случай.

Уравнение (3) написано во вращающейся системе координат. В этой системе все градиенты, производные по времени, внешнее магнитное поле выглядят следующим образом:

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{i}{m}U^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)\nabla U(\alpha,\beta,\gamma), \qquad V_{\alpha\beta} = -iU^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial}{\partial t}U(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = U^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{1}{2}\omega_L\sigma U(\alpha,\beta,\gamma), \tag{4}$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}A_\lambda\sigma^\lambda_{\alpha\beta}, \qquad V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}V_\lambda\sigma^\lambda_{\alpha\beta}, \qquad \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Omega_\lambda\sigma^\lambda_{\alpha\beta} \quad (\lambda = x,y,z).$$

Решение совместной системы кинетического и гидродинамического уравнений ищем в виде

$$\delta\vec{\nu}_k = \frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\delta\mathrm{E} + \delta\vec{\mu}_k,$$

где $\delta\vec{\mu}_k$ – неравновесная добавка к функции распределения. Как будет видно из решения, она пропорциональна первой степени отклонения от угла Леггетта. Мы можем искать решение системы гидродинамических уравнений как функционал относительно $\delta\beta$ (отклонение от угла Леггетта) и $|\delta\vec{\mu}|$ (неравновесная добавка к функции распределения). Тогда система (1), (2) оказывается независимой от (3) и мы методом, описанным в [1,2], получаем для частоты прецессии $\dot{\alpha}$ выражение

$$\dot{\alpha} = \omega_L + \frac{16}{15}\frac{\Omega^2}{\omega_L}(\frac{1}{4} + \cos\beta) + O(|\delta\vec{\mu}|\delta\beta). \tag{5}$$

Второй член в (5) происходит от равновесной функции распределения квазичастиц и содержит линейный по $\delta\beta$ член. Последний член содержит произведение двух малых $|\delta\mu|\delta\beta$, что, как будет видно из решения, есть квадратичная функция по $\delta\beta$.

Далее перейдем к работе с кинетическим уравнением (3). Мы выкинем все члены, зависящие от градиентов, так как нас интересует однородная прецессия. Решение кинетического уравнения (3) также будем искать в виде

$$\delta\vec{\nu}_k = \frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\delta\mathbf{E} + \delta\vec{\mu}_k,$$

$$\omega = \omega_L + \delta\omega(|\delta\vec{\mu}|),$$

где $\delta\omega(|\delta\vec{\mu}|)$ есть поправка к ларморовской частоте прецессии, зависящая от $|\delta\vec{\mu}|$. Мы знаем точное нелинейное решение кинетического уравнения

$$\delta\vec{\nu}_k = \frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\delta\mathbf{E}, \qquad \omega = \omega_L, \tag{6}$$

которое есть просто ларморовская прецессия. Кроме того, как показано в [4], существует простое соотношение, связывающее производные от параметра порядка и намагниченность системы:

$$\mathbf{S} = \chi(-\mathbf{X}). \tag{7}$$

где χ – восприимчивость ^{3}He-B. Вектор $\delta\mathbf{E}$ выражается через $\mathbf{X}$ [3,4], а последний, в свою очередь, через $\mathbf{S}$:

$$\delta\mathbf{E} = \frac{\xi_k}{E_k}\mathbf{X} + (1 - \frac{\xi_k}{E_k})\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{X}) = \frac{\xi_k}{E_k}\frac{\mathbf{S}}{\chi} + (1 - \frac{\xi_k}{E_k})\mathrm{d}(\mathrm{d}\frac{\mathbf{S}}{\chi}). \tag{8}$$

Линеаризуя уравнение (3) относительно решения (6), мы имеем для малых $\delta\vec{\mu}_k$ и $\delta\omega$ уравнение

$$(i\omega + \frac{1}{\tau})\delta\vec{\mu}_k + \delta\vec{\mu}_k \times \{\frac{\xi_k}{E_k}\frac{\mathbf{S}}{\chi} + (1 - \frac{\xi_k}{E_k})\mathrm{d}(\mathrm{d}\frac{\mathbf{S}}{\chi})\} + \delta\omega\varphi'_k\{\frac{\xi_k}{E_k}\frac{\mathbf{s}}{\chi} + (1 - \frac{\xi_k}{E_k})\mathrm{d}(\mathrm{d}\frac{\mathbf{s}}{\chi})\} = 0. \tag{9}$$

Здесь вектор $\mathbf{s}$ равен по величине вектору $\mathbf{S}$ и лежит в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{S}$. Уравнение (9) выражает ясный физический результат о том, что неравновесная добавка $\delta\vec{\mu}$ появляется лишь при отклонении частоты прецессии от ларморовской. Уравнение (9) можно записать как в ларморовской, так и в собственной системе координат, так как переход от одной к другой сводится к добавлению члена порядка $\delta\omega|\delta\vec{\mu}|$, чем явно можно пренебречь. Теперь нам более удобна собственная система координат, в которой векторы $\mathbf{S}$, $\mathbf{s}$ неподвижны. Из решения гидродинамических уравнений (5) мы знаем, чему равна $\delta\omega$ в нашем случае:

$$\delta\omega = \frac{16}{15}\frac{\Omega^2}{\omega_2}(\frac{1}{4} + \cos\beta).$$

Если бы мы учли последний член в (5), то получили бы член порядка $(\delta\beta)^2$, что было бы превышением точности. Намагниченность неравновесной части квазичастиц после $u - v$-преобразования будет равняться

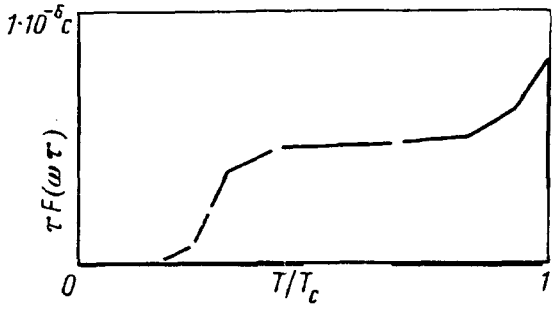
$$\delta\mathbf{S} = \sum_k \delta\mathbf{S}_k = \sum_k \{\frac{\xi_k}{E_k}\delta\vec{\mu}_k + (1 - \frac{\xi_k}{E_k})\mathrm{d}(\mathrm{d}\delta\vec{\mu}_k)\}. \tag{10}$$

Подставляя в это выражение решение кинетического уравнения (9) с учетом (5) и того, что $|\mathbf{S}| = |\mathbf{s}| = \omega_L$, мы будем иметь для модуля неравновесной намагниченности

$$\delta S_k = \frac{16}{15}\varphi'_k \tau \frac{\Omega^2}{\chi}\left(\frac{1}{4} + \cos\beta\right)\frac{(i\omega\tau + 1)^2\left[\frac{\xi_k^2}{E_k^2} + \frac{\Delta^2}{E_k^2}d_z^2\right] - \frac{\xi_k^2}{E_k^2}(i\omega\tau + 1)\omega\tau + \frac{\Delta^4}{E_k^2}d_z^4(\omega\tau)^2}{(i\omega\tau + 1)\left[(i\omega\tau + 1)^2 + \frac{\xi_k^2}{E_k^2}(\omega\tau)^2 + \frac{\Delta^2}{E_k^2}d_z^2(\omega\tau)^2\right]}. \tag{11}$$

Диссипативная функция дается формулой [2,4]

$$W = \delta \mathbf{S}^2/\tau. \tag{12}$$



Полная энергия системы представлена выражением (4.14) из [4]. Линейный вклад по $\delta\beta$ дают, во-первых, ларморовский член ($\mathbf{S}\omega_L \sim \omega_L^2\delta\beta$), а также все последующие члены в выражении (4.14) из [4]. Однако их величина порядка ($\mathbf{S}\delta\mathbf{S} \sim \omega_L(\Omega^2/\omega_L)\delta\beta \sim \Omega^2\delta\beta$), что мало по сравнению с ларморовской частотой. Поэтому мы можем записать

$$E = \omega_L S_\zeta \sin\beta = E_0 + \sqrt{\frac{15}{16}}\omega_L^2\delta\beta. \tag{13}$$

Отсюда, учитывая выражение

$$(d/dt)E = -W, \tag{14}$$

Получаем для скорости релаксации

$$\delta\dot{\beta} = \left(\frac{15}{16}\right)^{1/2}\frac{\tau}{\chi}\frac{\Omega^4}{\omega_L^2}F(\omega\tau), \tag{15}$$

где

$$F(\omega,\tau) = \sum_k \mathrm{Re}^2\varphi'_k \frac{(i\omega\tau + 1)^2\left[\frac{\xi_k^2}{E_k^2} + \frac{\Delta^2}{E_k^2}d_z^2\right] - \frac{\xi_k^2}{E_k^2}(i\omega\tau + 1)\omega\tau + \frac{\Delta^4}{E_k^2}d_z^4(\omega\tau)^2}{(i\omega\tau + 1)\left[(i\omega\tau + 1)^2 + \frac{\xi_k^2}{E_k^2}(\omega\tau)^2 + \frac{\Delta^2}{E_k^2}d_z^2(\omega\tau)^2\right]},$$

$$\tau^{-1} = \frac{\pi^2}{6}\frac{\nu_0}{\hbar}f(T)\left[\frac{\hbar}{2\pi}\nu_0^2 < W_S >\right] = \tau_0^{-1}(T_c)\frac{f(T)}{f(T_c)},$$

где $f(T)$ – функция Иосиды [5]. График $\tau F(\omega\tau)$ дан на рисунке. Это есть основной результат настоящей работы. Мы использовали значения $\omega_L = 2\pi \cdot 460\,\text{кГц}$; $\tau_0(T_c)T_c^2 = 0,3\,\text{мкс}\cdot\text{мК}^2$. При понижении температуры в гидродинамической области сначала наблюдается некоторое плато, связанное с тем, что $\tau \sim \exp(\frac{\Delta}{T})$, $\chi_q \sim \exp(-\frac{\Delta}{T})$ и экспонента в числителе (15) сокращается. Далее при еще большем понижении температуры вступает в игру функция $F(\omega\tau)$, которая приводит к зависимости $F(\omega\tau) \sim (\omega_L\tau)^{-2}$ и скорость релаксации экспоненциально убывает. В согласии с предыдущими работами [1,2], в гидродинамике для релаксации моды Бринкмана – Смита мы имеем $\tau_{eff} \sim (\omega_L^2/\tau\Omega^4)$ в бесстолкновительной области $\tau_{eff} \sim (\tau\omega_L^4/\Omega^4)$.

В заключение мне приятно выразить благодарность А.Ф.Андрееву и И.А.Фомину за полезные обсуждения, а также Ф.С.Копылову за помощь в численных расчетах.

---

1. И.А.Фомин, ЖЭТФ **84**, 2109 (1983).
2. А.В.Маркелов, ЖЭТФ **91**, 2053 (1986).
3. R.Combescot, Phys. Rev. **B13**, 126 (1976).
4. A.J.Leggett and S.Takagi, Ann. Phys. **106**, 79 (1977).
5. A.J.Leggett, Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975).