Письма в ЖЭТФ, том 62, вып.9, стр.715 - 718

ФЛУКТУАЦИЯ ТОКА В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ КОЛЬЦЕ

Г.Б.Лесовик

Институт физики твердого тела РАН,

142432 Черноголовка Московской обл., Россия

Поступила в редакцию 5 октября 1995 г.

Показано, что в приближении невзаимодействующих электронов идеально проводящее кольцо проявляет неэргодичность. В равновесии при равном нулю среднем токе коррелятор токов не затухает со временем. При явном учете взаимодействия с резервуаром эргодичность восстанавливается, а время затухания коррелятора определяется степенью размытия дискретных уровней.

Идеальное кольцо при низких температурах проявляет необычное для нормальных проводников свойство - при наличии конечного магнитного потока Φ, пронизывающего такое кольцо, по нему течет незатухающий ток (так называемый "persistent current") [1-5]. Оказывается, что флуктуации тока в таком кольце также весьма необычны, и в данной работе мы рассмотрим их для идеального квазиодномерного проводника, находящегося в равновесии и при нулевом потоке.

Основная особенность идеального связного проводника - наличие дискретных уровней, несущих ток. Каждый из таких уровней двукратно вырожден (в дополнение к спиновому вырождению) по направлению тока. В квазиодномерном идеальном проводнике волновые функции (ВФ) в полярных координатах

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi M} \chi(\rho, z),$$

где M – угловой момент, χ – нормированная ВФ в сечении кольца.

Оператор тока не перемешивает состояний, несущих ток противоположного знака, при условии $|M'| = |M|$ и перемешивает слабо при условии $|M' - M| \ll |M|$, поэтому приближенно можно записать полный ток через сечение кольца так:

$$\hat{I}(t) = I_c \sum_{\sigma=\pm 1; M', M>0} [a^{\dagger}_{M'\sigma} a_{M\sigma} - b^{\dagger}_{M'\sigma} b_{M\sigma}] \exp[-i(E_M - E_{M'})t/\hbar]. \qquad (1)$$

Здесь $I_c = \frac{e\hbar M_F}{2\pi R^2 m}$, $a^{\dagger}_M$ – операторы рождения состояний с угловым моментом M, $b^{\dagger}_{-M} \equiv a^{\dagger}_M$, $E_M = \frac{\hbar^2 M^2}{2mR^2}$, R –радиус кольца.

Спектральная плотность флуктуаций тока состоит из набора дельта-функций и имеет вид

$$S(\omega) = \sum_n f_n \delta(\omega - n\omega_0), \qquad (2)$$

где $\omega_0 = \hbar M_F / mR^2$.

Особый интерес представляют флуктуации при частотах $\omega < \omega_0$. Для описания нулевых частот рассмотрим вклад в оператор тока, не зависящий от времени:

$$\hat{I} = \sum_{\sigma=\pm 1; M>0} [a^{\dagger}_{M\sigma} a_{M\sigma} - b^{\dagger}_{M\sigma} b_{M\sigma}] I_c. \qquad (3)$$

Для системы с нефиксированным числом частиц и матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \exp\,[-\beta \sum_{M>0} [\hat{a}_M^\dagger \hat{a}_M + \hat{b}_M^\dagger \hat{b}_M](E_M - \mu)], \qquad \beta = 1/k_B T, \tag{4}$$

средний ток равен нулю

$$\langle \hat{I} \rangle = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{I}\} = 0. \tag{5}$$

В то же время коррелятор токов в такой системе конечен:

$$\langle \hat{I}^2 \rangle = \lim_{t\to\infty} \langle \hat{I}(0)\hat{I}(t) \rangle = 4I_c^2 \sum_{M>0} n(E_M)[1 - n(E_M)], \tag{6}$$

где $n(x-\mu)$ – фермиевская функция.

Сравнение формул (5) и (6) показывает, что система в рассматриваемом приближении неэргодична. Причиной этого является то, что одночастичная динамика электронов сама по себе не обеспечивает релаксации системы с дискретным спектром из одного токового состояния в другое, в отличии от систем с непрерывным спектром. Фермиевское распределение дает вероятности определенных токовых состояний в кольце так, что средний (по функции распределения) ток равен нулю, но из-за отсутствия релаксации средний по времени ток не нуль, за исключением случая, когда исходно было приготовлено состояние с нулевым полным током. Учет слабого, но конечного взаимодействия перемешивающего состояния с противоположными угловыми моментами приводит к временной эволюции системы во всем доступном ей фазовом объеме с "частотой посещения", по-прежнему даваемой распределением (4). В этом случае коррелятор $\langle \hat{I}(0)\hat{I}(t) \rangle$ при $t \to +\infty$ будет равен

$$\langle \hat{I}(0)\hat{I}(t) \rangle = \langle \hat{I}^2 \rangle \exp\,[-t/\tau_M], \tag{7}$$

с $\langle \hat{I}^2 \rangle$ из(6), где τ_M – характерное время "перемешивания" состояний с $M = \pm|M|$. Дельта-функции в спектральной плотности (2) размываются на масштабе $\sim \tau_M^{-1}$, а амплитуда пиков $\propto \tau_M$, в частности:

$$S(0) = 2\tau_M \langle \hat{I}^2 \rangle. \tag{8}$$

Как видим, интенсивность взаимодействия, даже (и в особенности) если оно мало, существенным образом определяет динамику флуктуаций на больших временах. Также обращает на себя внимание факт, что в пределе $k_B T \ll \hbar\omega_0$ коррелятор $\langle I^2 \rangle$ не зависит от температуры и равен

$$\langle \hat{I}^2 \rangle = I_c^2. \tag{9}$$

Соответственно в (7), (8) температурная зависимость вся заключена в зависимости $\tau_M(T)$. В то же время, при усреднении спектральной плотности по интервалу $\Omega \gg \omega_0$, при условии $\Omega \ll k_B T$, получаем более привычное выражение, целиком определяющееся одночастичной динамикой:

$$\bar{S}(0) \simeq \frac{8\pi k_B T I_c^2}{\hbar\omega_0^2} = 2k_B T \frac{2e^2}{h}. \tag{10}$$

Выражение (10) совпадает со спектральной плотностью равновесных флуктуаций в квазиодномерном идеальном проводнике, соединенном с резервуарами.

Рассмотрим теперь более сложную ситуацию, когда число частиц в кольце фиксированно. В этом случае матрица плотности по-прежнему диагональна в приближении невзаимодействующих электронов, а ее диагональные элементы есть

$$\rho = Z^{-1} \exp\left[-\beta \sum_{n=1}^{N} E_{M(n)}\right], \tag{11}$$

$$Z = \mathrm{Tr}\left\{\exp\left[-\beta \sum_{n=1}^{N} E_{M(n)}\right]\right\}.$$

Так как вероятности теперь зависят от полной энергии, появляются дополнительные корреляции между электронами. Рассмотрим случай $\hbar\omega_0 \gg k_B T$. Каждый одноэлектронный уровень четырехкратно вырожден, и при $k_B T \ll \hbar\omega_0$ величина флуктуаций существенно зависит от от числа электронов l на последнем заполненном уровне при $k_B T = 0$. Если $l = 4$ (уровень полностью заполнен), то возбуждения с минимальной энергией $\Delta = \hbar\omega_0$ есть просто электрон на уровне с энергией $E_F + \Delta$ в одном из четырех состояний и отсутствие электрона в одном из состояний с энергией E_F, таких возбуждений шестнадцать. Вероятность найти систему в одном из этих состояний α

$$\rho_{\alpha\alpha} \approx \frac{\exp[-\beta\Delta]}{1 + 16\exp[-\beta\Delta]}. \tag{12}$$

Вычисляя квадрат тока по формуле

$$\langle \hat{I}^2 \rangle = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha\alpha} \langle \alpha|\hat{I}|\alpha\rangle \langle \alpha|\hat{I}|\alpha\rangle, \tag{13}$$

получаем при $k_B T \ll \Delta$

$$\langle \hat{I}^2 \rangle = 8\exp[-\beta\Delta](2I_c)^2. \tag{14}$$

При $l < 4$ рассмотрение проводится аналогично, однако имеется специфика, связанная с вырождением основного состояния системы. Приведем для примера случай с $l = 1$. Кратность вырождения основного состояния равна четырем. Так как в пределе малой, но еще конечной температуры (а значит, и наличия связи с резервуаром), все варианты основного состояния равновероятны, то "правильным" пределом при $k_B T \to 0$ для основного состояния следует считать такое, когда электрон с максимальной энергией находится в смешанном состоянии с нулевыми проекциями спина и нулевым током. Основной вклад во флуктуации тока теперь будут давать не возбужденные состояния, а несущие ток состояния с минимальной энергией. Все они реализуются с равной вероятностью $\approx 1/4$, и для квадрата тока получаем

$$\langle \hat{I}^2 \rangle = I_c^2. \tag{15}$$

При вычислении коррелятора токов с учетом взаимодействия следует иметь в виду, что различные состояния могут иметь разные времена жизни, например, если они обладают разным полным спином. Тогда в коррелятор $\langle I(0)I(t)\rangle$ при $t \to \infty$ наибольший вклад дают долгоживущие состояния. Для $l = 1$, $T \to 0$

$$\langle I(0)I(t)\rangle \propto I_c^2 \exp[-t/\tau_{max}]. \tag{16}$$

Для $l=4$, $T \to 0$

$$\langle I(0)I(t)\rangle \propto \exp\left[-\beta\Delta\right] I_c^2 \exp\left[-t/\tau_{max}\right]. \tag{17}$$

Обратим внимание на то, что для $l=4$ флуктуации исчезают при $k_B T \to 0$, в то время как для $l = 1, 2, 3$ при $k_B T \to 0$ есть конечная спектральная плотность шума $S(0) \sim I_c^2 \tau_M$, обязанная своим происхождением вырожденности основного состояния. Ясно, что и результат (9), полученный для случая с нефиксированным числом частиц, имеет то же происхождение. Такая зависимость величины флуктуаций от вырожденности основного состояния вполне аналогична ситуации со средним током при конечном потоке Ф через кольцо - средний ток, "persistent current", скачком приобретает конечную величину при сколь угодно малом потоке, если основное состояние вырождено.

Хотя наличие упругого рассеяния снимает вырождение по угловому моменту, и при $\Phi=0$ все состояния не несут тока, при $\Phi \neq 0$ собственные состояния несут конечный ток [2] и ситуация становится аналогичной идеальному кольцу при $\Phi = 0$. Кроме того, как было указано в [6], в системе с нечетным числом электронов при наличии спин-орбитального взаимодействия собственные состояния могут нести конечный ток даже при наличии упругого рассеяния и $\Phi = 0$. При этом должно наблюдаться явление "псевдонеэргодичности", описанное выше.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 93-02-2113) и Международным научным фондом (грант M9M300).

1. F.Bloch, Phys. Rev. A **137**, 787 (1965).
2. M.Buttiker, Y.Imry, and R.Landauer, Phys. Lett.**96A**, 365 (1983).
3. L.P.Levy, G.Dolan, J.Dunsmuiv, and Q.H.Bonchiat, Phys. Rev. Lett. **64**, 2074 (1990).
4. V.Chandrasekhar, R.A.Webb, M.J.Brady et al., Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991).
5. D.Maily, C.Chapelier, and A.Benoit, Phys. Rev. Lett. **70**, 2020 (1993).
6. V.E.Kravtsov, M.R.Zirnbauer, Phys. Rev. B**46**, 4332 (1993) (см. также имеющиеся в работе ссылки).