Письма в ЖЭТФ, том 62, вып.10, стр.760 - 763 © 1995г. 25 ноября

СУПЕРПОЛЕВОЙ ПОДХОД К МЕТОДУ БВ-КВАНТОВАНИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

П.М.Лавров[1], *П.Ю.Мошин*, *А.А.Решетняк*

Томский государственный педагогический университет
634041 Томск, Россия

Томский государственный университет
634050 Томск, Россия

Поступила в редакцию 27 июля 1995 г.
После переработки 4 сентября 1995 г.

На основе суперполевой реализации стандартной БРСТ-симметрии даны правила лагранжева квантования калибровочных теорий общего вида. Доказана независимость S-матрицы от выбора калибровки. Получена суперполевая форма тождеств Уорда.

1. В основе современных методов [1–3] явно ковариантного квантования калибровочных теорий лежит принцип инвариантности относительно преобразований БРСТ (Бекки–Рюэ–Стора[2]–Тютин) [4,5]. В наиболее общем виде он реализован в схеме квантования БВ (Баталина–Вилковыского) [2,3]. Полный набор переменных в методе [2,3] включает в себя поля ϕ^A (состоящие из исходных классических полей, полей гостов, антигостов и лагранжевых множителей), антиполя ϕ^*_A противоположной статистики, обычные источники J_A к полям ϕ^A и вспомогательные поля λ^A, вводящие калибровку.

Для теорий Янга–Миллса преобразования БРСТ-симметрии были сформулированы в терминах геометрии в виде трансляций в суперпространстве [6–9]. Однако замкнутой суперполевой формы метода БВ-квантования для произвольных калибровочных теорий до сих пор не было найдено. В настоящей работе предложен суперполевой подход к схеме БВ-квантования, раскрывающий геометрический смысл БРСТ-симметрии, заложенной в этом методе. Мы используем конденсированные обозначения [10] и соглашения, принятые в [2,3].

2. Рассмотрим суперпространство (x^μ, θ) (x^μ – координаты пространства – времени, $\mu = (0, 1, ..., D-1)$; θ – скалярная грассмановская координата) с заданным на нем набором суперполей $\Phi^A(\theta)$ и соответствующих суперантиполей $\Phi^*_A(\theta)$:

$$\epsilon(\Phi^A) \equiv \epsilon_A, \quad \epsilon(\Phi^*_A) = \epsilon_A + 1.$$

Компонентный состав суперполей и суперантиполей определяется разложением по θ:

$$\Phi^A(\theta) = \phi^A + \lambda^A\theta, \quad \Phi^*_A(\theta) = \phi^*_A - \theta J_A, \tag{1}$$

$$\epsilon(J_A) = \epsilon(\phi^A), \qquad \epsilon(\lambda^A) = \epsilon(\phi^*_A)$$

и совпадает с набором переменных в схеме БВ-квантования (выбор знаков в (1) продиктован соображениями удобства).

---

[1] e-mail: lavrov@tspi.tomsk.su

[2] Becchi-Rouet-Stora

Определим производящий функционал функций Грина $Z[\Phi^*]$ как функционал от суперантиполей в виде следующего функционального интеграла:

$$Z[\Phi^*] = \int d\Phi' d\Phi^{*\prime} \rho[\Phi^{*\prime}] \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(S[\Phi', \Phi^{*\prime}] - U'\Psi[\Phi'] + (\Phi^{*\prime} - \Phi^*)\Phi')\right\} , \quad (2)$$

Здесь $S = S[\Phi, \Phi^*]$ – квантовое действие, удовлетворяющее производящему уравнению

$$\frac{1}{2}(S, S) + VS = i\hbar\Delta S, \quad (3)$$

где (,) – антискобка, определенная для произвольных функционалов $F = F[\Phi, \Phi^*]$, $G = G[\Phi, \Phi^*]$ по правилу (одновременно мы приводим и компонентное представление вводимых объектов суперполевого описания)

$$(F, G) = \int d\theta \left\{\frac{\delta F}{\delta \Phi^A(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\delta G}{\delta \Phi^*_A(\theta)} (-1)^{\epsilon_A + 1} - (-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(G)+1)}(F \leftrightarrow G)\right\} =$$

$$= \frac{\delta F}{\delta \phi^A} \frac{\delta G}{\delta \phi^*_A} - (-1)^{(\epsilon(F)+1)(\epsilon(G)+1)}(F \leftrightarrow G) , \quad (4)$$

а Δ – оператор вида

$$\Delta = -\int d\theta (-1)^{\epsilon_A} \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\delta}{\delta \Phi^*_A(\theta)} = (-1)^{\epsilon_A} \frac{\delta_l}{\delta \phi^A} \frac{\delta}{\delta \phi^*_A} . \quad (5)$$

При этом в (2), (3) вводятся операторы

$$U = -\int d\theta \frac{\partial \Phi^A(\theta)}{\partial \theta} \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)} = -(-1)^{\epsilon_A} \lambda^A \frac{\delta_l}{\delta \phi^A} , \quad (6)$$

$$V = -\int d\theta \frac{\partial \Phi^*_A(\theta)}{\partial \theta} \frac{\delta}{\delta \Phi^*_A(\theta)} = -J_A \frac{\delta}{\delta \phi^*_A} \quad (7)$$

(производные по θ всюду понимаются как левые), функционалы

$$\rho[\Phi^*] = \delta(\int d\theta \Phi^*(\theta)) = \delta(J) ,$$

$$\Phi^*\Phi = \int d\theta \Phi^*_A(\theta)\Phi^A(\theta) = \phi^*_A \lambda^A - J_A \phi^A , \quad (8)$$

а также фермионный функционал $\Psi = \Psi[\Phi]$, фиксирующий тот или иной выбор калибровки.

Отметим, что компонентные представления антискобки (4) и оператора Δ (5) совпадают с определениями соответствующих объектов формализма БВ-квантования, алгебраические свойства которых хорошо известны.

Легко проверить, что операторы U, V и Δ обладают следующими свойствами:

$$U^2 = 0, \quad V^2 = 0, \quad UV + VU = 0,$$

$$\Delta U + U\Delta = 0, \quad \Delta V + V\Delta = 0, \quad (9)$$

а действие V, U на антискобку дается правилами

$$V(F, G) = (VF, G) - (-1)^{\epsilon(F)}(F, V, G),$$

$$U(F,G) = (UF,G) - (-1)^{\epsilon(F)}(F,U,G). \tag{10}$$

Важным свойством подынтегрального выражения в (2) при $\Phi^* = 0$ является его инвариантность относительно следующих преобразований глобальной суперсимметрии с грассмановским параметром μ:

$$\delta\Phi^A(\theta) = \mu\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi^A(\theta) = \mu U\Phi^A(\theta) \ ,$$

$$\delta\Phi^*_A(\theta) = \mu\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi^*_A(\theta) + \mu\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\delta S}{\delta\Phi^A(\theta)} = \mu(V\Phi^*_A(\theta) + (S,\Phi^*_A(\theta))) \ . \tag{11}$$

Эти преобразования позволяют установить независимость вакуумного функционала $Z_\Psi \equiv Z[0]$ от выбора калибровки. Действительно, изменим калибровочный фермион по правилу $\Psi \to \Psi + \delta\Psi$ и совершим в функциональном интеграле для $Z_{\Psi+\delta\Psi}$ замену переменных вида (11) при следующем выборе параметра μ:

$$\mu = -\frac{i}{\hbar}\delta\Psi. \tag{12}$$

Тогда с учетом уравнения (3) получаем, что $Z_\Psi = Z_{\Psi+\delta\Psi}$ и приходим к выводу о калибровочной независимости S-матрицы.

Другим следствием свойства инвариантности Z являются тождества Уорда для производящего функционала функций Грина. Выполним в функциональном интеграле (2) замену переменных (11), используя уравнение для бозонного функционала $S = S[\Phi,\Phi^*]$. После несложных преобразований получим тождества Уорда для $Z[\Phi^*]$ в виде

$$-\int d\theta\frac{\partial\Phi^*_A(\theta)}{\partial\theta}\frac{\delta}{\delta\Phi^*_A(\theta)}Z[\Phi^*] = VZ[\Phi^*] = 0 \ . \tag{13}$$

Обратимся теперь к компонентной форме соотношений (11), (13). Преобразования (11) принимают вид

$$\delta\phi^A = \lambda^A\mu, \qquad \delta\lambda^A = 0 \ ,$$

$$\delta\phi^*_A = \mu\left(\frac{\delta S}{\delta\phi^A} - J_A\right), \qquad \delta J_A = 0 \tag{14}$$

и при $J = 0$ по форме совпадают с БРСТ-преобразованиями в схеме БВ-квантования. В этой связи (11) можно интерпретировать как суперполевую реализацию преобразований стандартной БРСТ-симметрии. При этом компонентное представление (13)

$$J_A\frac{\delta}{\delta\phi^*_A}Z(J,\phi^*) = 0 \tag{15}$$

формально совпадает с привычными тождествами Уорда для калиборовочных теорий.

Нетрудно установить связь предлагаемого подхода с правилами БВ-квантования. Для этого ограничимся специальным решением уравнения (3) в виде функционала $S[\Phi,\Phi^*]$, не зависящего от переменных λ^A:

$$\frac{\delta\overline{S}}{\delta\lambda^A} = \int d\theta\,\theta\frac{\delta\overline{S}}{\delta\Phi^A(\theta)} = 0 \tag{16}$$

и линейного по J_A

$$\overline{S}[\Phi,\Phi^*] = S(\phi,\phi^*) + J_A\phi^A \ , \tag{17}$$

где $S(\phi,\phi^*)$ удовлетворяет обычному мастер-уравнению работ [2,3]:

$$\frac{1}{2}(S,S) = i\hbar\Delta S. \tag{18}$$

Выберем граничное условие к (18) в виде

$$\overline{S}|_{\Phi^*=\hbar=0} = \mathcal{S}, \tag{19}$$

где $\mathcal{S}$ – исходное калибровочно-инвариантное классическое действие (заметим, что условие (19) совместно с производящим уравнением (3)). Тогда, принимая во внимание определения (6), (8), компонентный состав Φ^A, Φ^*_A и ограничиваясь классом калибровок, зависящих только от полей ϕ^A, мы приходим к следующему представлению для производящего функционала функций Грина $Z = Z(J)$ полей ϕ^A:

$$Z(J) = Z[\Phi^*]|_{\phi^*=0} = \int d\phi\, d\phi^*\, d\lambda \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S(\phi,\phi^*) + \left(\phi^*_A - \frac{\delta\Psi}{\delta\phi^A}\right)\lambda^A + J_A\phi^A\right]\right\} \ . \tag{20}$$

Последнее соотношение с учетом (17)–(19) определяет производящий функционал функций Грина в рамках формализма БВ-квантования.

3. В настоящей работе предложены правила лагранжева квантования калибровочных теорий общего вида на основе суперполевой реализации стандартной БРСТ-симметрии. Указана связь данной формулировки с правилами БВ-квантования. Доказана калибровочная независимость S-матрицы. Геометрический смысл тождеств Уорда в калибровочных теориях заключается в инвариантности производящего функционала функций Грина $Z[\Phi^*]$ относительно трансляций в суперпространстве (x^μ,θ) вдоль грассмановской координаты θ.

Авторы выражают свою благодарность рецензенту за критические замечания, способствовавшие улучшению содержания работы.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 94-02-03234 и Международным научным фондом, грант RI 1300.

---

1. B. de Witt and J.W. van Holten, Phys. Lett. **B79**, 389 (1978).
2. I.A.Batalin and G.A.Vilkovisky, Phys. Lett. **B102**, 27 (1981).
3. I.A.Batalin and G.A.Vilkovisky, Phys. Rev. **D28**, 2567 (1983).
4. C.Becchi, A.Rouet, and R.Stora, Commun, Math. Phys. **42**, 127 (1975).
5. И.В.Тютин, Препринт ФИАН СССР, N 39, М., 1975.
6. L.Bonora and M.Tonin, Phys. Lett. **B98**, 48 (1981).
7. L.Bonora, P.Pasti, and M.Tonin, J. Math. Phys. **23**, 839 (1982).
8. C.M.Hull, B.Spence, and J.L.Vazquez-Bello, Nucl. Phys. **B348**, 108 (1990).
9. L.Baulieu, Phys. Rep. **129**, 1 (1985).
10. Б.Девитт, *Динамическая теория групп и полей*, М.: Мир, 1987 (B.S. de Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, N.Y., 1965).