

ДВИЖЕНИЕ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В НАКЛОННОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

В.И.Мельников

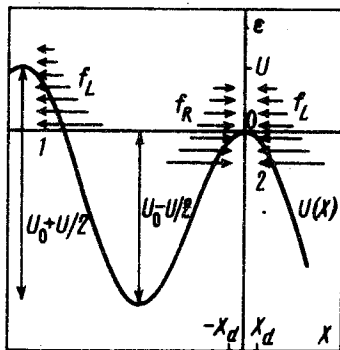
При малом трении уравнение Ланжевена для броуновской частицы в наклонном периодическом потенциале (НПП) сведено к двум интегральным уравнениям в энергетических переменных. Найдена зависимость средней скорости частицы от наклона потенциала и указана связь полученного выражения с вольт-амперной характеристикой (ВАХ) сосредоточенного джозефсоновского контакта.

Движение броуновской частицы в НПП является точной механической аналогией флуктуаций фазы параметра порядка в сосредоточенном джозефсоновском контакте, которые определяют ВАХ контакта в определенном интервале токов и напряжений. Наиболее трудной для решения является ситуация, отвечающая движению частицы с малым трением в глубоком по сравнению с тепловой энергией потенциальном рельефе, для которой имеются только численные результаты ^{1, 2}. Ниже найдено явное выражение для средней скорости броуновской частицы в НПП с учетом квантовой прозрачности барьеров и указана связь этого выражения с ВАХ джозефсоновского контакта.

Броуновское движение описывается уравнением Ланжевена

$$m \ddot{x} = -m\gamma \dot{x} - \partial U/\partial x + F + \eta(t), \tag{1}$$

где m и x – масса и координата частицы, γ – коэффициент вязкого трения, $U(x)$ – периодический потенциал, $U(x+L) = U(x)$, F – наклон потенциала (тянущая сила), $\eta(t)$ – стационарная гауссова флуктуационная сила, связанная с γ и температурой T флуктуационно-диссипационной теоремой (ФДТ): $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2m\gamma T \delta(t-t')$.



Потенциал $U(x) + Fx$ показан на рисунке. Разница в высотах барьеров 1 и 2 составляет $U = FL$. Высоты барьеров слева и справа равны $U_0 \pm U/2$, где U_0 – высота барьера при $F = 0$. Будем считать, что $U_0 \gg T$. В переносе тока тогда участвуют частицы с энергией на уровне барьера, а в глубине ямы сохраняется бoльцмановское распределение по полной энергии $\epsilon = p^2/2m + U(x)$, где $p \equiv m\dot{x}$ – импульс частицы. Нас интересует тот случай, когда частица, преодолевшая барьер, имеет заметную вероятность достичь вершины следующего барьера. Это означает, что потеря энергии δ при прохождении периода потенциала сравнима с температурой и мала в сравнении с глубиной ямы. Таким образом, будем считать

$$\delta \sim U \sim T \ll U_0; \quad \delta \equiv \gamma \int_0^L m \dot{x} dx = \gamma \int_0^L (-2mU(x))^{1/2} dx. \tag{2}$$

По порядку величины $\delta \sim \gamma U_0/\omega$, где $\omega \sim (U_0/mL^2)^{1/2}$ – характерная частота движения в потенциале $U(x)$. Условие $\delta \sim T$ означает, что $\gamma \sim \omega T/U_0 \ll \omega$. Этого достаточ-

но, чтобы в области шириной $\sim (T/m\omega^2)^{1/2} \ll L$ вблизи параболической вершины барьера, где $U(x) \simeq m\omega^2 x^2/2$, можно было пренебречь диссипацией и учитывать влияние барьера только через коэффициент прохождения $(1 + \exp(-2\pi\epsilon/\omega))^{-1}$. Вводя функции $f^L(\epsilon)$ и $f^R(\epsilon)$ распределения частиц, летящих на барьер с энергией ϵ при некоторых промежуточных координатах $\pm x_d$ таких, что $(T/m\omega^2)^{1/2} \ll x_d \ll L$, запишем условия их периодичности в виде интегральных уравнений

$$f^R(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\epsilon - \epsilon' - U)}{1 + \exp(2\pi\epsilon'/\omega)} [f^R(\epsilon') \exp(2\pi\epsilon'/\omega) + f^L(\epsilon')] d\epsilon'. \quad (3)$$

$$f^L(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\epsilon - \epsilon' + U)}{1 + \exp(2\pi\epsilon'/\omega)} [f^R(\epsilon') + f^L(\epsilon') \exp(2\pi\epsilon'/\omega)] d\epsilon', \quad (4)$$

где $g(\epsilon - \epsilon')$ есть гауссово распределение частицы по энергии ϵ вблизи одного из барьеров, если у соседнего барьера частица имела энергию ϵ' : $g(\epsilon - \epsilon') = (4\pi\delta T)^{-1/2} \exp[-(\epsilon - \epsilon' + \delta)^2/4\delta T]$

Вид этого ядра полностью определяется тем, что потеря энергии на периоде есть δ , а дисперсия энергии в соответствии с ФДТ есть $2(\delta T)^{1/2}$. Уравнение (3) показывает, например, что функция $f^R(\epsilon)$ у барьера 2 формируется из частиц, прошедших через барьер 1 (член с $f^R(\epsilon')$ в правой части (3)) и из частиц, отраженных от барьера 1 (член с $f^L(\epsilon')$, см. рисунок). Сдвиг аргумента на $\pm U$ в ядрах уравнений (3), (4) отвечает разным началам отсчета энергии у барьеров 1 и 2.

Средняя скорость движения частицы $\langle \dot{x} \rangle$ определяется через функции $f^R(\epsilon)$ и $f^L(\epsilon)$ выражением

$$\langle \dot{x} \rangle = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^R(\epsilon) - f^L(\epsilon)}{1 + \exp(-2\pi\epsilon/\omega)} d\epsilon. \quad (5)$$

Граничные условия на $f^R(\epsilon)$ и $f^L(\epsilon)$ запишем в предположении, что основное время частица проводит на дне потенциальной ямы. При обычной нормировке в переменных p , x на одну частицу в расчете на период получим

$$f^{R,L} = \frac{\Omega}{2\pi T} \exp(-(U_0 \mp U/2 + \epsilon)/T); \quad -\epsilon \gg T, \quad (6)$$

где Ω — частота колебаний частицы на дне ямы.

Замена вида

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\epsilon) \exp(i\lambda\epsilon/T)}{1 + \exp(2\pi\epsilon/\omega)} d\epsilon \quad (7)$$

сводит систему (3), (4) к уравнениям в конечных разностях

$$\varphi^R(\lambda) + \varphi^R(\lambda - 2\pi iT/\omega) = g_-(\lambda) [\varphi^R(\lambda - 2\pi iT/\omega) + \varphi^L(\lambda)], \quad (8)$$

$$\varphi^L(\lambda) + \varphi^L(\lambda - 2\pi iT/\omega) = g_+(\lambda) [\varphi^R(\lambda) + \varphi^L(\lambda - 2\pi iT/\omega)],$$

где $g_{\pm}(\lambda) = \exp(-\delta\lambda^2/T - i\lambda(\delta \pm U)/T)$. Решая эти уравнения относительно

$\varphi^{R,L}(\lambda - 2\pi iT/\omega)$, для функции $\varphi(\lambda) = \varphi^R(\lambda) - \varphi^L(\lambda)$ получим

$$\varphi(\lambda - 2\pi iT/\omega) = -G(\lambda) \varphi(\lambda), \quad (9)$$

$$G(\lambda) \equiv [1 - g_+(\lambda)g_-(\lambda)] / (1 - g_+(\lambda))(1 - g_-(\lambda)).$$

Решение уравнения (9) с получающимся из (6), (7) граничным условием

$$\varphi(\lambda) = -\frac{i\Omega\omega}{\pi} \frac{\text{sh}(U/2T) \exp(-U_0/T)}{\lambda+i}; \quad |\lambda+i| \ll 1$$

имеет вид

$$\varphi(\lambda') = -\frac{i\Omega\omega}{2\pi T} \frac{\text{sh}(U/2T) \psi(\lambda) \exp(-U_0/T)}{\text{sh}[\omega(\lambda+i)/2T] \psi(-i)}, \quad (10)$$

где

$$\psi(\lambda) = \exp \left\{ \frac{\omega}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda'}{4\pi i} \frac{\ln G(\lambda')}{\text{th}[\omega(\lambda'-\lambda)/2T]} \right\}. \quad (11)$$

Сопоставление (5) с (7) дает $\langle \dot{x} \rangle = L\varphi(-2\pi i T/\omega)$. С использованием (10), (11) после ряда преобразований получим

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{\Omega\omega L \text{sh}(U/2T) F^2(2\delta, 1, 1) \exp(-U_0/T)}{2\pi T \sin(\omega/2T) F(\delta, \alpha, \alpha) F(\delta, \beta, \beta) F(\delta, \alpha, \beta) F(\delta, \beta, \alpha)}, \quad (12)$$

где $\alpha = 1 + U/\delta$, $\beta = 1 - U/\delta$, функция $F(\delta, \alpha, \beta)$ определена выражением

$$\ln F(\delta, \alpha, \beta) = \frac{\omega \sin(\alpha\omega/2T)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{4\pi} \Phi(\delta, \alpha, \beta, \lambda);$$

$$\Phi(\delta, \alpha, \beta, \lambda) = \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{\delta}{T} \left(\lambda^2 + \frac{\beta^2}{4}\right)\right) \right] / \left[\text{ch}(\omega\lambda/T) - \cos(\alpha\omega/2T) \right].$$

Выражение (12) пригодно до окрестности точки срыва $U = \delta$, вблизи которой $\langle \dot{x} \rangle \sim (1 - U/\delta)^{-1}$. Продолжение ВАХ (12) через эту точку будет изложено отдельно.

Для нахождения ВАХ джозефсоновского контакта следует учесть, что среднее напряжение V сопоставляется $\langle \dot{x} \rangle$, а наклон потенциала U сопоставляется току I через контакт согласно

$$V = \pi\hbar \langle \dot{x} \rangle / eL; \quad U = \pi\hbar I / e,$$

причем входящие в (12) параметры U_0 , Ω , ω и δ связаны с критическим током I_c , емкостью C и сопротивлением R контакта выражениями

$$U_0 = \hbar I_c / e; \quad \Omega = \omega = (2eI_c / \hbar C)^{1/2}; \quad \delta = \frac{2}{R} \left(\frac{\hbar}{e} \right)^{3/2} \left(\frac{I_c}{C} \right)^{1/2},$$

где e — заряд электрона, и для ясности везде явно указана постоянная Планка.

Литература

1. Kurkijarvi Ju., Ambegaokar V. Phys. Lett., 1970, 31 A, 314.
2. Voss R.F. J. Low Temp. Phys., 1981, 42, 151.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 мая 1984 г.