Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.1, стр.33 - 36 © 1996г. 10 января

ВИХРЕВАЯ НИТЬ В ТЯГОТЕЮЩЕЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

Д.А.Киржниц, С.Н.Юдин

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН
117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 ноября 1995 г.

Дается общерелятивистское описание вихревой нити в сверхтекучей сердцевине массивного компактного тела. Показано, что обратное влияние гравимагнитного поля, порожденного вращением жидкости вокруг нити, на само это вращение может привести к изменению его направления. Выяснено, что общая формула, связывающая момент тела с асимптотикой его гравимагнитного поля на больших расстояниях, теряет силу в присутствии вихревых нитей.

PACS 67.57.De, 97.60.Jd

При медленном вращении тяжелого тела с угловой скоростью $\Omega < \Omega_c$, где Ω_c – порог образования вихревых нитей (ВН), сверхтекучая компонента вещества тела не дает вклада ни в его момент, ни в его гравимагнитное поле (ГМП) $g_{0\alpha}$ (g_{ik} – метрический тензор). Это связано с равенством нулю ковариантной скорости жидкости в лабораторной системе (хотя контравариантная скорость отлична от нуля, исчезая во вращающейся инерциальной системе) [1].

Появление ВН резко меняет ситуацию: иротационное (потенциальное) обтекание нити дает вклад и в момент и в ГМП. Обсуждение вопросов, связанных с этим вкладом, и содержится в данной заметке. В ней для простоты рассматривается случай одной ВН, расположенной на оси вращения. Этому случаю отвечает малая угловая скорость $\Omega \gtrsim \Omega_c$ и, соответственно, малая величина ГМП, по которой можно линеаризовать рассматриваемые ниже соотношения. Однако скорость иротационного течения вблизи ВН не мала и ее высшими степенями пренебрегать нельзя.

Приводимые ниже и будущие результаты предполагается приложить к физике пульсаров, у которых, однако, $\Omega >> \Omega_c$ и имеется развитая система ВН. Поэтому содержание данной заметки имеет характер предварительного, но необходимого этапа на пути к рассмотрению реалистической модели пульсара и выяснению адекватного механизма сбоя его периода.

1. 4-скорость u_i релятивистского сверхтекучего конденсата выражается с учетом соотношения $u^i u_i = 1$ через фазу α волновой функции конденсата (см. [2])[1]:

$$u_i = \partial_i \alpha / (\partial_k \alpha \partial^k \alpha)^{1/2} \ ;$$

знак в этой и последующих формулах фиксируется выбором направления вращения жидкости. В рассматриваемом ниже стационарном случае $\partial_0 \alpha = \mathrm{const}$, причем эта константа в простейшем случае равна массе частицы конденсата m. В сферических координатах $x^{1,2,3} = r, \theta, \varphi$ с осью по оси вращения тела в отсутствие ВН $\partial_3 \alpha = 0$, если, как это предполагается, система аксиально симметрична. ВН порождает зависимость α от x^3 вида $\alpha = N x^3 + ...$, где из условия однозначности волновой функции N – целое число (число квантов

[1]Здесь и ниже скорость света (а также постоянная Планка) положены равными единице.

циркуляции вокруг ВН). Фактически, как известно, $N = 1$ и потому $\partial_3\alpha = 1$. Последнее равенство будет подтверждено получением иrrотационной скорости правильного вида. Производные $\partial_1\alpha$ и $\partial_2\alpha$ очевидным образом равны нулю.

С учетом сказанного и формулы

$$v^3 = u^3/(1 - g_{33}(u^3)^2)^{1/2} \qquad (g_{33} = -r^2 \sin 2\theta)$$

для контравариантной 3-скорости сверхтекучей жидкости находим

$$v_s^3 = -g^3/\sqrt{g_{00}} + g_{33}^{-1}\sqrt{g_{00}}/m \qquad (g^3 = g_{33}^{-1} g_{03}) \ . \tag{1}$$

Соответствующая формула для нормального твердотельного течения имеет вид

$$v_n^3 = \Omega/\sqrt{g_{00}} \ . \tag{2}$$

Первый член в правой части (1) отвечает формуле Девитта, представляя собой гравитационный аналог лондоновской скорости в сверхпроводнике (см. [1]). Второй описывает иrrотационное течение вокруг ВН, переходя после выключения общерелятивистских эффектов в известное выражение для модуля скорости:

$$v_s = r\sin\theta v_s^3 = 1/mr\sin\theta \ .$$

2. ГМП, создаваемое течениями со скоростями (1), (2), определяется уравнением (см. [1, 3, §95])

$$f^{3\alpha}_{;\alpha} + \frac{3}{2}\nu' f^{31} = -(\kappa_n^2 v_n^3 + \kappa_s^2 v_s^3)\exp(\nu/2) \ , \tag{3}$$

где

$$f_{\alpha\beta} = \partial_\beta g_{0\alpha} - \partial_\alpha g_{0\beta} \ , \qquad \kappa^2 = 16\pi G\rho \ ,$$

ρ – плотность, считающаяся далее постоянной, G – постоянная тяготения. Используем решение задачи Шварцшильда для невращающегося сферически симметричного тела, получим

$$\exp(\nu) = g_{00} = (1 - (\kappa_n^2 + \kappa_s^2)r^2/6)^{-1/2} \ ,$$

$$\exp(\lambda) = -g_{11} = g_{00}^2 \ .$$

Подставляя в (3) представление

$$g^3 = g^3_{(1)} + g^3_{(2)} = G_1(r) + G_2(r)/\sin^2\theta \ , \tag{4}$$

можно прийти к уравнениям

$$(A\partial_r^2 + B\partial_r - \kappa_n^2 + C_{1,2})G_{1,2} = R_{1,2} \ . \tag{5}$$

Здесь

$$A = \exp(-\lambda) \ , \quad B = 4\exp(-\lambda)/r - (\kappa_s^2 + \kappa_n^2)r/4 \ , \quad C_1 = 0 \ ,$$

$$C_2 = 2/r^2 \ , \quad R_1 = \kappa_n^2\Omega \ , \quad R_2 = \kappa_s^2\exp(\nu)/mr^2 \ .$$

Уравнение для G_1 в точности совпадает с аналогичным уравнением в отсутствие ВН (см. [1]), и из него еще раз видно, что сверхтекучее течение без ВН не порождает ГМП (источник κ_s^2 в правой части (5) отсутствует). Уравнение для G_2 описывает вклад в ГМП от ВН. Граничные условия к нему,

$$G_2 = 0 \ , \quad \partial_r G_2 = 0 \quad \text{при } r = R \tag{6}$$

(R – радиус сверхтекучей области тела) вытекают из (4) и из сферической симметрии g^3 при $r > R$ (см. [3, §105] и ниже формулу (9)). Поэтому поле $g^3_{(2)}$ локализовано в сверхтекучей области тела.

3. В явной форме величину G_2 можно найти, если сердцевина тела чисто сверхтекучая ($\kappa_n^2 = 0$). Для этой цели удобно использовать представление решения уравнения (5) с учетом граничных условий (6) через частное решение

$$G_2^o = 1/\kappa_s^2 r^2 - 5/12$$

однородного уравнения (5):

$$G_2 = G_2^o \int_r^R \frac{dr'}{G_2^0} 2 \int_{r'}^R dr'' G_2^o \exp\left(\int_{r'}^{r''} dr \frac{B}{A}\right) \frac{R_2}{A}.$$

Мы ограничимся приведением первых двух членов разложения величины $g^3_{(2)}$ по параметру $\lambda_s = r_g^s/R < 1$, где $r_g^s = 2GM_s$ – гравитационный радиус области сверхтекучего вещества (M_s – его масса). В первом порядке по λ_s

$$g^3_{(2)} = 3\lambda_s (1 - r/R)^2 / m r^2 \sin^2\theta \tag{7}$$

(см. (4)). Поправка следующего порядка отвечает введению в (7) дополнительного фактора

$$1 + \frac{\lambda_s}{12}(1 + 16\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}) \ .$$

Поправка того же порядка по λ_s связана с входящей в (1) величиной g_{00}:

$$g_{00} = 1 + \frac{\lambda_s}{2}(\frac{r}{R})^2 + \ \ldots$$

Теперь можно ответить на вопрос, каково искажение поля скоростей ВН (второй член (1)) за счет обратного влияния созданного этим полем ГМП (величина $g^3_{(2)}$, см. (7)) на само это поле. Учету такого влияния отвечает подстановка (7) в первый член (1) и сравнение со вторым членом. В итоге получается, что во второй член нужно ввести фактор

$$1 - 3\lambda_s (1 - \frac{r}{R})^2 - \frac{\lambda_s^2}{4}(1 + 16\frac{r}{R} - 5(\frac{r}{R})^2)(1 - \frac{r}{R})^2 + \ \ldots \tag{8}$$

Таким образом, мы видим, что для не очень далеких от единицы значений λ_s фактор (8) может заметно отличаться от единицы в области, прилегающей к оси ВН, а при $\lambda_s > \frac{1}{3}$ этот фактор мог бы, в принципе, вообще изменить знак. Это означало бы изменение направления ирротационного обтекания оси ВН за счет общерелятивистских эффектов.

4. Существует утверждение, что в общем случае момент $\mathcal{M}$ тяжелого тела может быть найден из асимптотики ГМП на больших расстояниях от тела

$$g^3 \to -2G\mathcal{M}/r^3 \qquad (r \to \infty) \tag{9}$$

(см. [3, §105]). Покажем, что это утверждение становится ошибочным, если внутри тела имеются ВН.

В самом деле, уже отмечалось, что сферически симметричная компонента $g^3_{(1)}$ ГМП не меняется с появлением ВН, а именно она, как видно из (9), и определяет момент. Поэтому, будь соотношение (9) справедливым, с ВН был бы связан равный нулю момент. Но хорошо известно, что это не так: уже в отсутствие общерелятивистских эффектов ирротационное вращение вокруг ВН создает момент, равный единице (в обычных единицах $\hbar$) на каждую частицу сверхтекучей области тела. Более того, если бы момент ВН действительно равнялся нулю, то ее образование было бы невыгодно, так как из условия минимума энергии $E - \vec{\Omega}\mathcal{M}$ состояние с ВН более выгодно при $\Omega > \Omega_c$ только благодаря слагаемому $-\vec{\Omega}\mathcal{M}$.

Чтобы разобраться в возникшем противоречии, можно ограничиться низшим пост-ньютоновским приближением, в котором уравнение (3) примет вид

$$\Delta(g^3[\mathbf{n},\mathbf{r}]) = \kappa^2\mathbf{v} \qquad (\mathbf{n} = \vec{\Omega}/\Omega) \ .$$

Умножая его слева векторно на $\mathbf{r}$, интегрируя по пространству и взяв проекцию на направление момента, совпадающее с $\mathbf{n}$, получим

$$16\pi G\mathcal{M} = \int d\mathbf{x}(\mathrm{div}((r^2 - (\mathbf{n},\mathbf{r})^2)\nabla g^3) \ . \tag{10}$$

Правая часть (2) действительно сводится к интегралу по бесконечно удаленной поверхности, как этого требует (9), если подынтегральное выражение регулярно. Однако при наличии ВН на ее оси вращения возникает сильная сингулярность в g^3 типа

$$1/r^2\sin^2\theta = 1/(r^2 - (\mathbf{n},\mathbf{r})^2)$$

(см. (4)). Ее нужно исключить, окружая ось ВН цилиндром бесконечно малого радиуса и, соответственно, учитывая вклад в правую часть (2) интеграла по поверхности этого цилиндра. Соответствующий дополнительный вклад в момент равен как раз величине M_s/m_s, то есть числу частиц в сверхтекучей области тела (см. выше).

---

1. А.Ю.Андреев, Д.А.Киржниц, С.Н.Юдин, Письма в ЖЭТФ **61**, 825 (1995).
2. Д.А.Киржниц, С.Н.Юдин, УФН **165**, 1335 (1995).
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1988.