Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.2, стр.129 - 134 © 1996г. 25 января

ОБЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНЫХ ВЕКТОРОВ

А.М.Семихатов, И.Ю.Типунин

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 декабря 1995 г.

Найдена общая конструкция для "топологических" сингулярных векторов (БРСТ-*инвариантных сингулярных векторов скрученной* $N=2$ суперконформной алгебры, построенных над киральными примарными состояниями). Используемая параллельно с известной конструкцией МФФ для сингулярных векторов $s\ell(2)$ алгебры Каца–Муди, новая конструкция реализует изоморфизм топологических и $s\ell(2)$-сингулярных векторов.

PACS 11.25.Hf

Напомним, прежде всего, чем определяется необходимость изучения сингулярных векторов в модулях Верма бесконечномерных алгебр Ли, представленных в конформной теории поля. Условия отщепления сингулярных векторов ("нулевых" состояний) приводят к дифференциальным уравнениям на корреляторы в конформных моделях [1]. Это в действительности является проявлением того факта, что неприводимые представления соответствующих алгебр получаются путем факторизации модулей Верма по сингулярным векторам [2]. Значительные усилия были затрачены поэтому, вслед за выяснением положений сингулярных векторов [3,2,4–6], на поиск для них явных формул и обнаружение отображений между сингулярными векторами различных алгебр [7–17]. Открытие общей конструкции для сингулярных векторов в модуле Верма над алгеброй Каца–Муди $s\ell(n)$ [7] инициировало попытки построить сингулярные векторы и для других алгебр (Вирасоро, $N=2$, W_3), используя идею "аналитического продолжения".

Настоящая работа полностью реализует подобную программу для так называемых топологических сингулярных векторов – БРСТ-инвариантных сингулярных векторов скрученной $N=2$ суперконформной алгебры, построенных над БРСТ-инвариантными киральными примарными состояниями. Как мы показываем, существует замкнутая алгебраическая конструкция для всех топологических сингулярных векторов в модулях Верма.

1. Топологические сингулярные векторы возникают над топологическими примарными состояниями, для которых выполнены условия (которые мы будем называть условиями старшего веса)

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_0|\mathrm{h}\rangle_{top}=\mathcal{Q}_0|\mathrm{h}\rangle_{top}=\mathcal{L}_0|\mathrm{h}\rangle_{top}=0\,,\quad \mathcal{H}_0|\mathrm{h}\rangle_{top}=\mathrm{h}|\mathrm{h}\rangle_{top}\,,\\ \mathcal{G}_{\geq 1}|\mathrm{h}\rangle_{top}=\mathcal{Q}_{\geq 1}|\mathrm{h}\rangle_{top}=\mathcal{L}_{\geq 1}|\mathrm{h}\rangle_{top}=\mathcal{H}_{\geq 1}|\mathrm{h}\rangle_{top}=0\,,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathcal{L}_m$ (генераторы Вирасоро), $\mathcal{Q}_m$ (БРСТ-ток), $\mathcal{H}_m$ ($U(1)$-ток) и $\mathcal{G}_m$ ($m\in\mathbb{Z}$) – генераторы скрученной $N=2$ суперконформной алгебры (которую мы будем, ввиду [18, 19], называть топологической (конформной) алгеброй; h называется топологическим $U(1)$ зарядом). Обозначения для топологической алгебры взяты из [15]. От БРСТ-инвариантного топологического сингулярного вектора, построенного на таком состоянии $|\mathrm{h}\rangle_{top}$, требуется выполнение тех же условий зануления, что и выше, кроме $\mathcal{L}_0 \approx 0$ и $\mathcal{G}_0 \approx 0$ (а от $\mathcal{G}_0$-инвариантного – кроме $\mathcal{L}_0 \approx 0$ и $\mathcal{Q}_0 \approx 0$). Эти сингулярные векторы в модуле Верма существуют, если $\mathrm{h} = \mathrm{h}^+(r,s)$ или $\mathrm{h}^-(r,s)$, где

$$\mathrm{h}^+(r,s) = -\tfrac{r-1}{t} + s - 1\,, \quad \text{или} \quad \mathrm{h}^-(r,s) = \tfrac{r+1}{t} - s\,, \qquad r,s \in \mathrm{N} \tag{2}$$

и $t \equiv k+2$ связано с топологическим центральным зарядом c формулой $c = 3(t-2)/t$. Обозначим модули Верма, построенные над примарными состояниями с топологическими $U(1)$ зарядами (2), через $V^+_{r,s}$ и $V^-_{r,s}$, соответственно.

Рассмотрим для определенности сингулярные векторы $|S^+(r,s)\rangle$ в модуле Верма $V^+_{r,s}$. Все такие векторы имеют структуру $|S^+(r,s)\rangle = \mathcal{Q}_0 \ldots \mathcal{Q}_{r-1}|T^+(r,s)\rangle$, где $|T^+(r,s)\rangle$ – также элемент *модуля Верма*, удовлетворяющий некоторым естественным условиям старшего веса.

Мотивировкой нижеследующей общей конструкции для сингулярных векторов топологической конформной алгебры является аналогия с известной конструкцией МФФ [7] для сингулярных векторов $s\ell(2)$ алгебры Каца–Муди. Отображение Казамы–Судзуки [20] позволяет, как известно, вложить топологическую конформную алгебру в универсальную обертывающую алгебры $s\ell(2)_k \oplus [BC]$, где $[BC]$ – фермионная BC-система ("духи" спина 1), а $s\ell(2)_k$ – алгебра Каца–Муди уровня k:

$$\mathcal{Q} = CJ^+\,, \quad \mathcal{G} = \tfrac{1}{k+2}BJ^-\,, \quad \mathcal{H} = \tfrac{k}{k+2}BC - \tfrac{2}{k+2}J^0\,, \tag{3}$$

$$\mathcal{T} = \tfrac{1}{k+2}(J^+J^-) - \tfrac{k}{k+2}B\partial C - \tfrac{2}{k+2}BCJ^0\,. \tag{4}$$

Вычисления [15] обнаруживают изоморфизм между топологическими и $s\ell(2)$-сингулярными векторами, а именно, оказывается, что

$$|T^+(r,s)\rangle = |\mathrm{MFF}\{r,s\}\rangle \otimes |0\rangle_{BC}\,, \tag{5}$$

где $|0\rangle_{BC}$ – вакуум BC системы, а $|\mathrm{MFF}\{r,s\}\rangle$ – сингулярный вектор в модуле Верма над алгеброй Каца–Муди $s\ell(2)_k$, построенный над состоянием старшего веса $|j_+(r,s)\rangle$, где $j_+(r,s) = (r-1)/2 - t(s-1)/2$, $r,s \in \mathrm{N}$, $t \equiv k+2$. При этом для $s\ell(2)$-сингулярных состояний имеется производящая формула [7] [1)]

$$\begin{aligned}&|\mathrm{MFF}\{r,s\}\rangle = \\ &\quad (J_0^-)^{r+(s-1)t}(J_{-1}^+)^{r+(s-2)t}(J_0^-)^{r+(s-3)t}\ldots(J_{-1}^+)^{r-(s-2)t}(J_0^-)^{r-(s-1)t}|j_+(r,s)\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

в которой степени генераторов, не являющиеся натуральными числами, исчезают после многократного применения формул

$$\begin{aligned}(J_0^-)^p J_m^0 &= pJ_m^-(J_0^-)^{p-1} + J_m^0(J_0^-)^p\,,\\ (J_0^-)^p J_m^+ &= J_m^+(J_0^-)^p + 2pJ_m^0(J_0^-)^{p-1} + p(p-1)J_m^-(J_0^-)^{p-2}\,,\end{aligned} \tag{7}$$

и аналогичных соотношений для $J_m^0(J_{-1}^+)^p$ и $J_m^-(J_{-1}^+)^p$.

[1)] Мы рассматриваем лишь половину всех $s\ell(2)$-сингулярных векторов, вторая половина строится над $|j_-(r,s)\rangle$.

Чрезвычайно интересен вопрос о том, можно ли перенести на топологическую алгебру непосредственно саму производящую конструкцию (6).

При $s = 1$ топологическое *сингулярное* состояние[2)]

$$\left|S^+(r,1)\right\rangle = \mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_1 \ldots \mathcal{Q}_{r-1}\,\mathcal{G}_{-r} \ldots \mathcal{G}_{-2}\mathcal{G}_{-1}\left|\mathrm{h}^+(r,1)\right\rangle_{top} \tag{8}$$

тождественно переписывается при использовании отображения Казамы–Судзуки (3), (4) как вектор МФФ $(J^+_{-1})^r\left|\mathrm{MFF}\{r,1\}\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle_{BC}$. Несложно также проверить, что если все показатели степени в (6) целые положительные (в частности, t – целое), то следующий топологический (сингулярный!) вектор

$$\left|T^+(r,s)\right\rangle = \mathcal{G}_{(\mathrm{h}-s+1)t-1} \cdots \mathcal{G}_{(s-1)t-2}\mathcal{G}_{(s-1)t-1} \cdot \mathcal{Q}_{-(s-1)t} \cdots \mathcal{Q}_{(s-\mathrm{h}-2)t-1}\mathcal{Q}_{(s-\mathrm{h}-2)t} \times$$
$$\cdots$$
$$\times\, \mathcal{G}_{(\mathrm{h}-1)t-1} \cdots \mathcal{G}_{t-2}\mathcal{G}_{t-1} \cdot \mathcal{Q}_{-t} \cdots \mathcal{Q}_{-\mathrm{h}t-1}\mathcal{Q}_{-\mathrm{h}t} \times$$
$$\times\, \mathcal{G}_{\mathrm{h}t-1} \cdots \mathcal{G}_{-2}\mathcal{G}_{-1}\left|\mathrm{h}^+(r,s)\right\rangle_{top} \tag{9}$$

(где $\mathrm{h} = \mathrm{h}(r,s)$ для натуральных r и s таких, что $|(s-1)t| \le r$) также тождественно равен $\left|\mathrm{MFF}\{r,s\}\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle_{BC}$.

2. Желаемое обобщение формулы (9) до общей конструкции для топологических сингулярных векторов должно выглядеть как 'продолжение' не по степеням, а по *модам* генераторов, и более того, требует еще и рассмотрения объектов, выглядящих как произведения мод $\mathcal{G}$ и $\mathcal{Q}$ с нецелым числом сомножителей.

Таким объектам может быть в действительности придан смысл *сплетающих операторов* (ср. [21]) между обобщенными модулями Верма $\mathcal{V}^{+;\theta}_{r,s}$, $\mathcal{V}^{-;\theta}_{r,s}$. Обобщенные модули Верма $\mathcal{V}^{+;\theta}_{r,s}$ и $\mathcal{V}^{-;\theta}_{r,s}$ получаются из обычных модулей Верма $V^+_{r,s}$ и $V^-_{r,s}$ преобразованием спектрального потока [22] $\mathcal{U}(\theta)$, которое отображает топологическую конформную алгебру в изоморфную алгебру, $\mathcal{A}_n \mapsto \mathcal{A}^\theta_n$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\theta_n &= \mathcal{L}_n + \theta\mathcal{H}_n + \tfrac{\mathrm{c}}{6}(\theta^2+\theta)\delta_{n,0}\,, \qquad \mathcal{H}^\theta_n = \mathcal{H}_n + \tfrac{\mathrm{c}}{3}\theta\delta_{n,0}\,,\\ \mathcal{Q}^\theta_n &= \mathcal{Q}_{n-\theta}\,, \qquad \mathcal{G}^\theta_n = \mathcal{G}_{n+\theta}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Модули $\mathcal{V}^{+;\theta}_{r,s}$ и $\mathcal{V}^{-;\theta}_{r,s}$ построены над векторами старшего веса $\left|\mathrm{h}^\pm(r,s),\theta\right\rangle$, которые удовлетворяют следующим условиям зануления ($\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}$):

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_m\left|\mathrm{h}^\pm(r,s),\theta\right\rangle = 0\,,\ m \ge 1\,, \qquad \mathcal{Q}_m\left|\mathrm{h}^\pm(r,s),\theta\right\rangle = 0\,, \quad m = -\theta + p\,,\\ &\mathcal{H}_m\left|\mathrm{h}^\pm(r,s),\theta\right\rangle = 0\,,\ m \ge 1\,, \qquad \mathcal{G}_m\left|\mathrm{h}^\pm(r,s),\theta\right\rangle = 0\,, \quad m = \theta + p\,, \end{aligned} \quad p \in \mathrm{N}_0 \tag{11}$$

Сплетающие операторы $g(\theta_{2j+1}, \theta_{2j}-1)$ и $q(-\theta_{2j}, -\theta_{2j+1}-1)$ действуют на множестве обобщенных модулей Верма, содержащем хотя бы один стандартный модуль Верма, если 'спектральный' параметр θ принимает значения

$$\theta_i = \begin{cases} (\mathrm{h}-j)t - 1 & i = 2j+1\,,\\ jt & i = 2j\,. \end{cases} \tag{12}$$

Ниже мы будем работать только с указанными θ_i. Тогда сплетающие операторы действуют на множестве обобщенных модулей Верма следующим образом:

$$g(\theta_{2j+1},\theta_{2j}-1)\ :\ \mathcal{V}^{\pm,\theta_{2j}}_{r,s} \to \mathcal{V}^{\mp,\theta_{2j+1}}_{r,s\mp1}\,, \quad q(-\theta_{2j},-\theta_{2j+1}-1)\ :\ \mathcal{V}^{\mp,\theta_{2j+1}}_{r,s} \to \mathcal{V}^{\pm,\theta_{2j}}_{r,s\mp1}\,, \quad s \ge 2\,.$$

[2)] Известное также W.Lerche (частное сообщение).

Случай $s = 1$ является выделенным. Как только *длина* $b - a + 1$ оказывается натуральным числом, сплетающий оператор дается произведением соответствующих мод, $g(a,b) = \mathcal{G}_a\mathcal{G}_{a+1}\dots\mathcal{G}_b$ и $q(a,b) = \mathcal{Q}_a\mathcal{Q}_{a+1}\dots\mathcal{Q}_b$. Именно это происходит при $s = 1$, так что имеем отображения

$$g(\theta_{2j+1},\theta_{2j}-1) = \prod_{i=1}^{\ell}\mathcal{G}_{\theta_{2j+1}+i-1} : \mathcal{V}_{r,1}^{\pm,\theta_{2j}} \to \mathcal{V}_{r,1}^{\pm,\theta_{2j}} \quad \ell = \theta_{2j} - \theta_{2j+1} \in \mathrm{N}_0 \tag{13}$$

(и аналогично для $q(-\theta_{2j}, -\theta 2j + 1 - 1))$, которые по существу определяют сингулярные векторы в модулях $\mathcal{V}_{r,1}^{+;\theta}$, $\mathcal{V}_{r,1}^{-;\theta}$ (ср. (8)).

Свойства операторов $g(a,b)$ и $q(a,b)$ в общем положении представляют собой продолжение свойств произведений $\mathcal{G}_a\mathcal{G}_{a+1}\dots\mathcal{G}_{a+n}$ и $\mathcal{Q}_a\mathcal{Q}_{a+1}\dots\mathcal{Q}_{a+n}$ $(n \in \mathrm{N})$. Приведем необходимые для дальнейшего алгебраические свойства операторов $g(a,b)$ (аналогичные свойства имеют место и для $q(a,b)$).

1). Правила коммутации с генераторами $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{H}_n$ с *целочисленными* n:

$$\mathcal{K}_n g(a,b) = g(a,b)\mathcal{K}_n + \sum_{l=0}^{n-1} g(a,b-l-1)\,[\mathcal{K}_n\,,\mathcal{G}_{b-l}]\,\mathcal{G}_{b-l+1}\dots\mathcal{G}_b\,, \quad n \geq 1, \tag{14}$$

$$g(a,b)\mathcal{K}_n = \mathcal{L}_n g(a,b) + \sum_{l=0}^{-n-1}\mathcal{G}_a\dots\mathcal{G}_{a+l-1}\,[\mathcal{G}_{a+l}\,,\mathcal{K}_n]\,g(a+l+1,b)\,,\ n \leq -1\,, \tag{15}$$

где $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ или $\mathcal{H}$, а также

$$[\mathcal{H}_0, g(a,b)] = (b-a+1)g(a,b)\,,\quad [\mathcal{L}_0, g(a,b)] = -\tfrac{1}{2}(b+a)(b-a+1)g(a,b)\,. \tag{16}$$

Подобные же правила имеются и для коммутации сплетающих операторов с фермионными генераторами $\mathcal{Q}_a$ и $\mathcal{G}_a$, индекс a в которых выбран так, чтобы они действовали в соответствующих модулях.

2). Обобщение "принципа Паули" $(0 \leq m \leq n \Rightarrow \mathcal{G}_a\dots\mathcal{G}_{a+n}\mathcal{G}_{a+m} = 0)$, имеющее следующий вид:

$$\mathcal{G}_{a+m}\,g(a,b) = 0\,,\quad g(a,b)\,\mathcal{G}_{b-m} = 0\,,\quad m \in \mathrm{N}\,,\quad g(a,c)\,g(d,b) = 0\,,\quad c - d \in \mathrm{N}\,. \tag{17}$$

3). Формулы 'склейки' операторов g:

$$g(a,c-1)\,g(c,d) = g(a,d)\,,\quad \text{и}\quad g(a+1,a) = 1\,. \tag{18}$$

3. Заметим, что любой сингулярный вектор представляет собой сплетающий оператор, действующий из модуля Верма в себя. Поэтому будем искать сингулярный вектор в виде 'составного' сплетающего оператора

$$g(\theta_n,\theta_{n-1}-1)q(-\theta_{n-1},-\theta_{n-2}-1)\dots q(-\theta_2,-\theta_1-1)g(\theta_1,-1)|\mathrm{h}^+(r,s)\rangle \tag{19}$$

Нетрудно проверить, пользуясь формулами (14)–(17), что выражение (19) представляет собой старший вес в обобщенном модуле Верма $\mathcal{V}_{r,k}^{+;\theta_n}$ (т.е. удовлетворяет условиям (11)). Требуется, чтобы образ составного сплетающего оператора, стоящего в (19) слева от старшего веса, принадлежал $\mathcal{V}_{r,s}^{+}$. Это эквивалентно условию $\theta_n = -r$, $r \in \mathrm{N}$, что воспроизводит условие (2) существования в модуле Верма $\mathcal{V}_{r,s}^{+}$ сингулярного вектора. Сингулярные векторы в модуле $V^-_{r,s}$ строятся аналогично с заменой $g(a,b-1)\leftrightarrow q(-a,-b-1)$. Итак основное утверждение состоит в том, что все топологические сингулярные векторы в модуле Верма $V^+_{r,s}$ даются следующей общей конструкцией (выглядящей как продолжение формулы (9) с целых точек):

$$\begin{aligned}|T^+(r,s)\rangle = g(-r,(s-1)t-1)\,q(-(s-1)t,r-1-t)\,\ldots \\ g((s-2)t-r,t-1)\,q(-t,r-1-t(s-1))\,g((s-1)t-r,-1)\,|\mathrm{h}^+(r,s)\rangle_{top}\end{aligned} \tag{20}$$

Являясь частным случаем формулы (19), $|T^+(r,s)\rangle$ удовлетворяет условиям (11) с $\theta=-r$, а это и есть условия, налагаемые на сингулярный вектор $|T^+(r,s)\rangle$. Поэтому остается показать только, что (20) действительно переписывается в виде полинома по генераторам топологической конформной алгебры, действующим на указанный старший вес. Доказательство проводится индукцией по удалению от 'центра' формулы (20). Из доказательства также легко извлекается итерационная схема, позволяющая построить сингулярный вектор $|S^\pm(r,s)\rangle$ исходя из 'младших' сингулярных векторов $|S^\pm(r,s'<s)\rangle$.

Заметим, что сплетающие операторы из (20) (читаемые справа налево) отображают модуль Верма $V^+_{r,s}$ последовательно в

$$V^+_{r,s}\leftarrow \mathcal{V}^{-,\theta_{2s-2}}_{r,s-1}\ldots\leftarrow \mathcal{V}^{\pm,\theta_s}_{r,1}\leftarrow \mathcal{V}^{\pm,\theta_{s-1}}_{r,1}\leftarrow\ldots\leftarrow \mathcal{V}^{-,\theta_2}_{r,s-2}\leftarrow \mathcal{V}^{-,\theta_1}_{r,s-1}\leftarrow V^+_{r,s}\,, \tag{21}$$

При этом в центре формулы (20) всегда находится произведение r мод операторов $\mathcal{G}$ (если s нечетно) или $\mathcal{Q}$ (если s четно); в последнем случае это операторы $\mathcal{Q}_{-st/2}\ldots\mathcal{Q}_{-st/2+r-1}$, которые и осуществляют отображение $\mathcal{V}^{-,\theta_s}_{r,1}\leftarrow\mathcal{V}^{-,\theta_{s-1}}_{r,1}$. Пусть теперь полином $\mathcal{P}$, находящийся внутри 'симметричных' относительно центра сплетающих операторов $g(a,b)\mathcal{P}g(c,d)$, уже не содержит операторов g и q. Записывая $g(a,b)\mathcal{P}g(c,d)$ в виде $g(a,c-1)\mathcal{G}_c\ldots\mathcal{G}_b\mathcal{P}g(c,d)$, мы легко убеждаемся, изучая аргументы сплетающих операторов в (20) и используя (11), что генераторы $\mathcal{G}_c\ldots\mathcal{G}_b$ являются операторами уничтожения по отношению к обобщенному старшему весу $g(c,d)\ldots g((s-1)t-r,-1)\,|\mathrm{h}^+(r,s)\rangle_{\mathrm{top}}$. Используя обычные коммутационные соотношения топологической конформной алгебры, мы перемещаем эти генераторы направо, уничтожая их на старшем весе. Легко видеть, что все операторы $\mathcal{G}_\mu$, которые могут остаться после этой процедуры, имеют вид $\mathcal{G}_{c-n}$, $n=1,2,\ldots$, а потому к ним применима вторая из формул (17). После ее применения мы получаем выражение вида $g(a,c-1)\,\mathcal{S}\,g(c,d)$, где $\mathcal{S}$ – полином только по целочисленным отрицательным модам операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{H}$.

В полученном выражении $g(a,c-1)\,\mathcal{S}\,g(c,d)$, далее, мы используем формулы (15) для того чтобы передвигать $g(a,c-1)$ направо до тех пор, пока во всех мономах сплетающие операторы $g(a,c-1)$ и $g(c,d)$ не окажутся рядом. После этого, используя формулы склейки (18), получаем сумму мономов, в каждом из которых оператор $g(a,d)$ всегда имеет целочисленную длину (факт, также усматриваемый из анализа формулы (20)). В том случае, когда эта длина $d-a+1$ неотрицательна, $g(a,d)$ заменяется на произведение соответствующих мод $\mathcal{G}$. Однако в ряде мономов окажутся операторы $g(a,d)$, имеющие целые отрицательные длины, от $-r(s-2)$ до -1. К таким мономам применяется формула

$$\begin{aligned}g(\mu,\theta_{n-1}-1)q(-\theta_{n-1},-\theta_{n-2}-1)\,\ldots g(\theta_1,-1)|\mathrm{h}\rangle_{top} = \\ \frac{1}{\Lambda(\mu,\theta_{n-1},\mathrm{h})}\,\mathcal{Q}_{1-\mu}g(\mu-1,\theta_{n-1}-1)\ldots g(\theta_1,-1)|\mathrm{h}\rangle_{top}\end{aligned} \tag{22}$$

где $\Lambda(\theta+N,\theta,\mathrm{h}) = (N-1)\left(2\frac{c}{3}\theta + \frac{c}{3}N + 2\mathrm{h} - 2\theta\right)$ является собственным значением оператора $\{\mathcal{Q}_{-\mu+1}, \mathcal{G}_{\mu-1}\} = \frac{c}{3}(-1+\mu)\mu - 2(1-\mu)\mathcal{H}_0 + 2\mathcal{L}_0$, вычисленным на левой части равенства (22). Это равенство применяется последовательно, начиная с тех членов, которые содержат сплетающий оператор наиболее отрицательную длины $-r(s-2)$, вплоть до членов со сплетающими операторами длины -2. После этого не остается и мономов, содержащих $g(\theta+1,\theta-1)$ длины -1. Тем самым пара симметричных относительно центра сплетающих операторов "распадается" в полином по модам топологических конформных генераторов. Это завершает шаг индукции. Следующий шаг получается повторением только что описанного с заменами $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ и $g(a,b-1) \leftrightarrow q(-a,-b-1)$. В итоге (после s шагов) выражение (20) переписывается как элемент модуля Верма $V^{+}_{r,s}$. Этот элемент и является сингулярным вектором $|T^{+}(r,s)\rangle$.

4. Итак, формула (20) дает общую алгебраическую конструкцию для топологических сингулярных векторов. Предложенная конструкция является "прямой" в том смысле, что *не* требует решения каких-либо уравнений и позволяет получить сингулярные векторы из производящего выражения посредством конечного числа *алгебраических* манипуляций[3)]. Отметим возможность получения из общей конструкции (20) нетривиальных следствий для физических состояний [22] с ненулевым духовым числом. Разнообразные подробности будут опубликованы в более детальном изложении.

Мы благодарны Б.Л.Фейгину за полезные обсуждения и М.А.Соловьеву за критику первоначальной версии предложенной конструкции. Настоящая работа частично поддержана Международным научным фондом и Правительством РФ (грант #MQM300), а также грантом РФФИ 94-02-06338-а.

1. A.A.Belavin, A.M.Polyakov, and A.B.Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241**, 333 (1984).
2. B.L.Feigin and D.B.Fuchs, *Representations of the Virasoro algebra*, in: *Representations of infinite-dimensional Lie groups and algebras*, N.-Y., Gordon and Breach, 1986.
3. V.G.Kac and D.A.Kazhdan, Adv. Math. **34**, 97 (1979).
4. D.Friedan, Z.Qiu, and S.Shenker, Phys. Rev. Lett. **52**, 1575 (1984).
5. W.Boucher, D.Friedan, and A.Kent, Phys. Lett. **B172**, 316 (1986).
6. E.B.Kiritsis, Phys. Rev. **D36**, 3048 (1987).
7. Ф.Г.Маликов, Б.Л.Фейгин, Д.Б.Фукс, Функц. Ан. Прилож. **20**(2), 25 (1986).
8. L.Benoit and Y.Saint-Aubin, Phys. Lett. **B215**, 517 (1988).
9. A.Kent, Phys. Lett. **B273**, 56 (1991).
10. M.Bauer, P. di Francesco, C.Itzykson, and J.-B.Zuber, Nucl. Phys. **B362**, 515 (1991).
11. A.Ch.Ganchev and V.B.Petkova, Phys. Lett. **B293**, 56 (1992); Phys. Lett. **B318**, 77 (1993).
12. P.Bowcock and G.M.T.Watts, Phys. Lett. **B297**, 282 (1992).
13. G.M.T.Watts, Nucl. Phys. **B407**, 213 (1993).
14. M.Bauer and N.Sochen, Comm. Math. Phys. **152**, 127 (1993).
15. A.M.Semikhatov, Mod. Phys. Lett. **A9**, 1867 (1994).
16. M.Dörrzapf, Int. J. Mod. Phys. **A10**, 2143 (1995).
17. T.Eguchi and S.-K.Yang, Mod. Phys. Lett. **A4**, 1653 (1990).
18. E.Witten, Commun. Math. Phys. **118**, 411 (1988); Nucl. Phys. B340 (1990) 281.
19. Y.Kazama and H.Suzuki, Nucl. Phys. **B321**, 232 (1989).
20. B.Feigin and F.Malikov, *Integral intertwining operators and complex powers of differential (q-difference) operators.*
21. W.Lerche, C.Vafa, and N.P.Warner, Nucl. Phys. **B324**, 427 (1989).
22. B.H.Lian and G.J.Zuckerman, Phys. Lett. B254, 417 (1991).

[3)] Приведенные алгебраические правила имеют ясный операциональный смысл, например, легко формализуются на языке MATHEMATICA, код которой с необходимостью содержит список всех *правил*, требующихся для превращения выражения (20) в элемент модуля Верма. Полный код доступен по запросу на asemikha@lpi.ac.ru.