Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.5, стр.375 - 380 © 1996г. 10 марта

ДЕФОРМАЦИЯ АЛГЕБРЫ ВИРАСОРО И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

С.В.Крюков[1)]

Поступила в редакцию 22 сентября 1995 г.
После переработки 15 февраля 1996 г.

Рассмотрена специальная деформация алгебры Вирасоро, при которой не деформируется скрининговый оператор (деформируется пространство, где он действует). Данная деформация приводит к некоторой 3-индексной алгебре. Оказывается, что вычет от производящей функции генераторов этой алгебры является производящей функцией интегралов движения для квантовой модели синус-Гордон. Вычислена алгебра производящих функций. Приведены явные формулы для нескольких первых интегралов движения.

PACS: 02.10.-v, 03.65.-w

Задача нахождения интегралов движения является общей для всех интегрируемых теорий. Уже на классическом уровне метод "обратной задачи" позволяет переходить от полевых переменных к переменным типа "действие–угол", временная эволюция в этих переменных является наиболее простой. Интегралы движения являются переменными "действия". Переход к новым переменным упрощает поиск классических решений нелинейных уравнений. Метод "обратной задачи" по своему устройству позволяет находить только коммутирующие интегралы движения, но это не исчерпывает все количество интегралов движения. На классическом уровне не очень ясна полезность некоммутирующих интегралов движения, однако на квантовом уровне существование некоммутирующих интегралов движения приводит к дополнительным нетривиальным симметриям, которые, возможно, позволят фиксировать корреляционные функции теории. Здесь мы хотим продемонстрировать простой способ нахождения квантовых некоммутирующих интегралов движения для теории синус-Гордон при некотором значении константы связи. Мы вычисляем производящую функцию интегралов движения и находим алгебру, которую образуют эти производящие функции. Оказывается, что это есть многоиндексная бесконечно-мерная алгебра Ли. Квантовые интегрируемые теории могут также быть обнаружены как возмущенные конформные теории при специальных типах возмущения [1]. Вероятно, в таких теориях также присутствуют некоммутирующие интегралы движения. Их вычисление предстовляло бы несомненный интерес.

1. *Алгебра Вирасоро и $b-c$ система.* Напомним общие сведения о системе фермионных духов или $b-c$-системе [2]. Операторные разложения для полей b и c имеют вид

$$c(z)b(w) \sim \frac{1}{(z-w)}.$$

Можно ввести тензор энергии импульса

$$T(z) = - : b(z)\partial_z c(z) :, \tag{1.1}$$

который образует алгебру Вирасоро с центральным зарядом $c = -2$. Введем также духовой числовой ток:

$$j(z) = - : b(z)c(z) : .$$

[1)] e-mail: kryukov@itp.ac.ru

Нам также понадобятся следующие операторные разложения:

$$T(z)b(w) \sim \frac{b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w b(w)}{(z-w)}, \qquad T(z)c(w) \sim \frac{\partial_w c(w)}{(z-w)},$$
$$j(z)b(w) \sim -\frac{b(w)}{(z-w)}, \qquad j(z)c(w) \sim \frac{c(w)}{(z-w)}$$

и разложения по модам Фурье :

$$c(z) = \sum_n z^{-n} c_n; \qquad b(z) = \sum_n z^{-n-1} b_n.$$

Правило бозонизации $b-c$-системы имеет вид

$$b(z) =: e^{\varphi(z)} :; \qquad c(z) =: e^{-\varphi(z)} :,$$

где $\varphi(z)$ – свободное бозонное поле со следующим спариванием :

$$\varphi(z)\varphi(w) \sim \log(z-w).$$

Тензор энергии импульса и ток в бозонном представлении выглядят следующим образом:

$$T(z) = \frac{1}{2}(: (\partial\varphi(z))^2 : -\partial^2\varphi(z)); \qquad j(z) = -\partial\varphi(z).$$

Как следует из работы [3] генератор алгебры Вирасоро в бозонном представлении для произвольного центрального заряда принадлежит ядру скринингового оператора:

$$s_1 = \int : e^{\alpha\varphi(z)} : dz,$$

действующего коммутатором в пространстве упорядоченных дифференциальных полиномов поля $\varphi(z)$. Переформулируем это утверждение для $b-c$ -системы. Из правил бозонизации ясно, что скрининговый оператор в нашем случае имеет вид

$$s_1 = \int b(z)dz.$$

Он действует в пространстве дифференциальных полиномов b и c, но эти полиномы являются полиномами специального вида. Введем оператор

$$h = \frac{1}{2\pi i}\int j(z)dz,$$

назовем его оператором градуировки. Оператор градуировки h действует на поля b и c следующим образом:

$$hb(z) = -b(z), \qquad hc(z) = c(z).$$

Таким образом, градуировка $b(z)$ равна -1; градуировка $c(z)$ – $+1$ (контур в операторе h окружает точку, где находится соответствующее поле). Теперь определим действие s_1 в пространстве упорядоченных дифференциальных полиномов b и c, имеющих нулевую градуировку. Генератор алгебры Вирасоро (1.1), как легко проверить, принадлежит ядру оператора s_1 в этом пространстве. .

2. *$b-c$-система и квантовое уравнение синус-Гордон.* Задача поиска интегралов движения для уравнения синус-Гордон была сформулирована в [4]. Суть ее состоит в том, что локальные интегралы движения определяются как объекты, принадлежащие пересечению ядер операторов:

$$s_1 = \int : e^{\alpha\varphi(z)} : dz; \qquad s_0 = \int : e^{-\alpha\varphi(z)} : dz, \tag{2.1}$$

действующих коммутаторами в пространстве однократных интегралов от упорядоченных дифференциальных полиномов поля $\varphi(z)$. Как можно легко проверить, пример такого интеграла движения имеет вид

$$Q_1 = \int : (\partial\varphi(z))^2 : (z)dz. \tag{2.2}$$

Если переформулировать задачу об интегралах движения в терминах полей b и c, то в нашем случае получим:

$$s_1 = \int b(z)dz; \qquad s_0 = \int c(z)dz. \tag{2.3}$$

Операторы s_1 и s_0 действуют в пространстве однократных интегралов от дифференциальных полиномов b и c, имеющих нулевую градуировку, и мы должны искать пересечение ядер операторов s_1 и s_0 в этом пространстве. Как легко проверить, пример такого интеграла движения выглядит следующим образом:

$$Q_1 = \int :b\partial c:(z)dz. \tag{2.4}$$

3. *Деформация алгебры Вирасоро.* Конструкция в разд. 1 для генератора алгебры Вирасоро (1.1) может быть легко деформирована, если мы рассмотрим вместо дифференциальных полиномов от b и c некоторые разностные полиномы. Легко проверить, что ядру операторов s_1 и h принадлежит следующий элемент:

$$T_q^{n;m}(z) = b(z)c(q^m z) - b(z)c(q^n z),$$

где m,n и q – произвольные числа. Если $q \to 1$, то генератор $T_q^{n;m}(z) \sim T(z)$, где $T(z)$ определяется формулой (1.1), поэтому мы называем $T_q^{n;m}(z)$ генератором деформированной алгебры Вирасоро, q – параметр деформации. В бозонном представлении выражение для $T_q^{n;m}$ выглядит следующим образом:

$$T_q^{n;m}(z) = \frac{:e^{:\varphi(z)-\varphi(q^n z)}}{(q^n-1)z} - \frac{:e^{:\varphi(z)-\varphi(q^m z)}}{(q^m-1)z}.$$

Заметим, что $T_q^{n;m}(z)$ обладает следующими свойствами:

$$T_q^{n;m}(z) = -T_q^{m;n}(z); \qquad T_{q^e}^{m;n}(z) = T_q^{ne;me}.$$

Условие, что $T_q^{n;m}(z)$ принадлежит ядру s_1 и h и что $T_q^{n;m}(z)$ образует базис, гарантирует, что алгебра операторных разложений будет замкнутой. Легко пок азать, что эта алгебра операторных разложений имеет вид

$$T_q^{n;m}(z)T_q^{n';m'}(w) = \frac{T_q^{m+m';m'+n}(w)}{(z-q^{m'}w)} + \frac{T_q^{n'+n;n'+m}(w)}{(z-q^{n'}w)} +$$
$$+\frac{T_q^{n+m';n+n'}(q^{-n}w)}{(q^n z-w)} + \frac{T_q^{n'+m;m+m'}(q^{-m}w)}{(q^m z-w)}.$$

Если мы введем фурье-коэффициенты по формулам

$$L_k^{n;n'} = \frac{1}{2\pi i}\oint_0 T_q^{m;n'}(z)z^{-k}dz, \qquad T_q^{n;n'}(z) = \sum_k L_k^{n;n'} z^{k-1},$$

то алгебра на фурье-коэффициенты примет вид

$$[L_k^{n;m}; L_p^{n';m'}] = q^{-km'} L_{k+p}^{m+m';m'+n} + q^{-kn'} L_{k+p}^{n+n';n'+m} +$$
$$+q^{-qn} L_{k+p}^{n+m';n+n'} + q^{-pm} L_{k+p}^{n'+m;m+m'}. \tag{3.1}$$

Таким образом, мы получим некоторую деформацию алгебры Вирасоро. Можно показать простыми, но длинными вычислениями, что тождество Якоби выполнено. Таким образом, деформированная алгебра Вирасоро является алгеброй Ли.

Следует отметить, что данная деформация алгебры Вирасоро имеет тесную связь с аффинными алгебрами [5].

4. *Производящая функция интегралов движения.* В этом разделе мы покажем, к чему приводит деформация алгебры применительно к задаче об

интегралах движения. Как было показано в разд.3, элемент $T_q^{n;m}(z)$ в бозонном представлении принадлежит ядру операторов s_1 и h. Действуя на $T_q^{n;m}(z)$ оператором s_0, получим

$$s_0 T_q^{n;m}(z) =: e^{-\varphi(q^n z)} : - : e^{-\varphi(q^m z)} : . \tag{4.1}$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется понятие q-производной и q-интеграла или интеграла Джексона [6]. Определим q-производную следующим образом:

$$D_z f(z) = \frac{f(qz) - f(q^{-1}z)}{(q - q^{-1})z}.$$

Интеграл Джексона является обратной операцией к q-производной и определяется так:

$$\int\limits_0^{s\infty} d_p t f(t) = s(1-p) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(sp^m)p^m.$$

И, как легко показать, что если

$$f(t) = D_t F(t), \qquad \text{то} \quad \int\limits_0^{s\infty} f(t) d_p t = 0; \qquad p = q^2.$$

Следует сделать замечание по поводу действия операторов s_1 и s_0. Операторы s_1 и s_0 действуют, как коммутаторы в (4.2), но на локальные поля $A(z)$ действие коммутаторов может быть записано через контурные интегралы вокруг точек, где расположено локальное поле. Интегрирование Джексона делает поле не локальным, и поэтому действие s_1 и s_0 на такие интегралы остается действием коммутаторами:

$$s_1 A(z) = [s_1, A(z)] = \oint\limits_z dw s_1(w) A(z); \qquad s_0 A(z) = [s_0, A(z)] = \oint\limits_z dw s_0(w) A(z). \tag{4.2}$$

Проинтегрируем (в смысле Джексона) выражение (4.1), предварительно поделив на z, в результате правая часть выражения обратится в нуль. Таким образом, $\hat{\Lambda}^{n;m}(q)$ коммутирует с гамильтонианом модели синус-Гордон и поэтому является производящей функцией для интегралов движения. Она задается следующим образом:

$$\hat{\Lambda}^{n;m}(q) = \int d_{q^{\frac{n-m}{2}}} z \frac{T_q^{n;m}(zq^{-\frac{n+m}{2}})}{z} \tag{4.3}$$

Эта производящая функция является нетривиальной, так как подынтегральное выражение не есть полная q-производная. В результате мы получили аналог интеграла движения (2.4) в деформированном случае. В отличие от недеформированного случая, (4.3) содержит произвольный параметр q (его можно назвать спектральным параметром) и удовлетворяет условиям задачи об интегралах движения для любого значения q, поэтому, разлагая по этому параметру, в точке $q = 1$ мы получим интегралы движения.

Существует и другая возможность обратить в нуль правую часть выражения (4.1). Для мероморфной (голоморфной вне $z = 0, \infty$) функции $f(z)$ справедливо следующее соотношение [7]:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_0 dz D_z f(z) = 0.$$

Таким образом, мы вычислили обычный вычет в точке $z = 0$. Применим эту операцию к обеим частям равенства (4.1), предварительно поделив на z. В результате получим производящую функцию интегралов движения в более простом виде:

$$\Lambda^{n;m}(q) = \oint\limits_0 \frac{T_q^{n;m}(z)}{z} dz. \tag{4.4}$$

Здесь следует сделать замечание относительно разложения $\Lambda^{n;m}(q)$ по параметру q в точке $q=1$. Явное вычисление дает:

$$\Lambda^{n;m}(q) \to A_1 \oint I_1(z)dz + (q-1)[A_2^1 \oint I_1(z)dz + A_2^2 \oint I_2(z)zdz] + \dots, \tag{4.5}$$

где A_1, A_2^i, $i = 1,2$ – числовые коэффициенты, зависящие от n,m; $I_i(z)$ – локальные плотности для интегралов движения (дифференциальные полиномы поля $\varphi(z)$). Выражения для первых нескольких $I_i(z)$ собраны в Приложении. Интерес представляет член разложения

$$Q = \oint I_2(z)zdz = \oint [: (\partial\varphi(z))^3 : + \partial^3\varphi(z) - 3 : \partial\varphi(z)\partial^2\varphi(z) :]zdz,$$

он является интегралом движения, так как

$$s_1 Q = 0, \qquad s_0 Q = \oint\limits_0 z\partial_z^2 : e^{-\varphi(z)} : dz = 0.$$

Очевидно, что интегралом движения является и выражение вида

$$Q' = \oint I_2(z)dz.$$

Таким образом, мы видим, что в нашем разложении (4.5) присутствует только часть интегралов движения; чтобы получить другие интегралы движения, нужно удалять по одной степени z из выражения для интегралов движения, получающихся в разложении (4.5), действие обеих скринингов будет также занулять такие выражения, поэтому мы будем получать новые интегралы движения. Из анализа разложения (4.5) и замечаний, приведенных выше, мы предполагаем, что интегралы движения строятся следующим образом:

$$Q_k^j = \frac{1}{2\pi i} \oint I_{k+1}(z) z^j dz; \qquad j = 0, \dots k; \qquad k = 0, 1, 2\dots.$$

Можно вычислить коммутатор

$$[Q_1^1; Q_0^0] = 2Q_1^0$$

и обнаружить, что в разложении $\Lambda^{nm}(q)$ имеются некоммутирующие интегралы движения. Коммутирующее семейство интегралов движения предположительно имеет вид Q_k^0 (см. Приложение).

5. *Алгебра производящих функций интегралов движения.* В предыдущем разделе мы получили пример некоммутирующих интегралов движения. Их существование связано с алгеброй (3.1). Поэтому интересно вычислить, какую алгебру образуют производящие функции интегралов движения. Здесь мы вычислим эту алгебру.

Введем обозначение

$$\Lambda_k^{n;m}(q) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_0 \frac{T_q^{n;m}(z)}{z^{k+1}} dz. \tag{5.1}$$

Требование, что генераторы должны быть ядром операторов s_1, s_0 и h гарантирует, что алгебра замыкается при умножении ее элементов, если мы правильно выбрали базис. Вычислим сначала коммутатор следующего вида:

$$[\Lambda_0^{n;n'}(q); \Lambda_0^{m;m'}(q)] = \Lambda_1^{n'+m;m+n}(q)q^{-m} + \Lambda_1^{n'+m';m'+n}(q)q^{-m'} +$$
$$+ \Lambda_1^{n+m';n+m}(q)q^{-n} + \Lambda_1^{m+n';m'+n'}(q)q^{-n'}. \tag{5.2}$$

Из (5.2) видно, что $\Lambda_k^{n;n'}(q)$ не образуют базиса. Правильный элемент базиса выглядит так:

$$\Lambda_k^{n,n',m,m'} = \Lambda_k^{n+m;n'+m}(q)q^{-km} + \Lambda_k^{n+m';n'+m'}(q)q^{-km'}. \tag{5.3}$$

Легко проверить, что (5.3) принадлежит ядру операторов s_1, s_0, h. Теперь можно вычислить алгебру производящих функций интегралов движения:

$$[\Lambda_k^{n,n',m,m'};\Lambda_p^{l,l',o,o'}] = q^{pl+pm+m}\Lambda_{k+p+1}^{n,n',l+m+o,l+m+o'} + q^{pl+pm'+m'}\times$$
$$\times\Lambda_{k+p+1}^{n,n',l+m'+o',l+m'+o} + q^{pl'+pm'+m}\Lambda_{k+p+1}^{n,n',l'+m+o',l'+m+o} + q^{pl'+pm'+m'}\times$$
$$\times\Lambda_{k+p+1}^{n,n',l'+m'+o,l'+m'+o'} + q^{nk+ok+o}\Lambda_{k+p+1}^{l,l',m'+n+o,m+n+o} + q^{nk+o'k+o'}\times$$
$$\times\Lambda_{k+p+1}^{l,l',n+m+o',m'+n+o'} + q^{n'k+ok+o}\Lambda_{k+p+1}^{l,l',m+n'+o,m'+n'+o} + q^{n'k+o'k+o'}\Lambda_{k+p+1}^{l,l',m'+n'+o',m+n'+o'}.$$

Можно показать, что тождество Якоби выполнены, поэтому алгебра производящих функций является алгеброй Ли. Если $q \to 1$, то генератор (6.3) также переходит в генератор алгебры Вирасоро.

Предположения сделанные в разд.4 об интегралах движения, могут быть доказаны с использованием представления Q_k^j в виде выражений от b и c полей.

Необходимо отметить, что мы рассмотрели некоммутирующие интегралы движения только при одном значении константы связи, интересно рассмотреть другие значения таким же образом. Интересно было бы изучить представление алгебры производящих функций, она является аналогом алгебры Вирасоро в конформных теориях.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 93-02-3135), International Science Foundation (Grant M6N000) и Международной Соросовской Программы Образования в области точных наук (грант а208-ф).

Здесь мы приведем несколько первых локальных плотностей $I_i(z)$ для интегралов движения (обозначения см. в разд. 4). А также вычислим некоторые коммутаторы из инволютивного семейства.

Выражение для $I_i(z)$ имеет вид

$$I_1(z) =: (\partial\varphi(z))^2 : -\partial^2\varphi(z), \qquad I_2(z) =: (\partial\varphi(z))^3 : - : 3\partial\varphi(z)\partial^2\varphi(z) : +\partial^3\varphi(z),$$
$$I_3(z) =: (\partial\varphi(z))^4 : -6 : (\partial\varphi(z))^2\partial^2\varphi(z) : +4 : \partial\varphi(z)\partial^3\varphi(z) : +3 : (\partial^2\varphi(z)^2) : -\partial^4\varphi(z),$$
$$I_4(z) =: (\partial\varphi(z))^5 : -10 : (\partial\varphi(z))^3\partial^2\varphi(z) : +10 : (\partial\varphi(z))^2\partial^3\varphi(z) : -$$
$$-10 : \partial^2\varphi(z)\partial^3\varphi(z) : +\partial^5\varphi(z) + 5 : (3(\partial^2\varphi(z))^2 - \partial^4\varphi(z))\partial\varphi(z) :,$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться что следующие коммутаторы нулевые:

$$[Q_0^0, Q_1^0] = 0, \qquad [Q_1^0, Q_2^0] = 0, \qquad [Q_0^0, Q_3^0] = 0, \qquad [Q_1^0, Q_3^0] = 0, \qquad [Q_0^0, Q_2^0] = 0.$$

1. A.B.Zamolodchikov, Adv. Studies in Pure. Math. **19**, 641 (1989).
2. D.Friedan, E.Martinec, and S.Shenker, Nucl. Phys. **B271**, 93 (1986).
3. B.Feigin and E.Frenkel, Phys. Lett. **246**, 75 (1990).
4. B.Feigin and E.Frenkel, Integral of motion and quantum groups, Preprint, hep-th 9310022.
5. V.G.Drinfeld, Soviet. Math. Dokl. **36**, №2 (1988).
6. A.Matsuo, Jackson integral of Jordan-Pochnammer type and K-2 equation, Preprint (1992).
7. A.Matsuo, Free field realization of q-deformed primary field for $U_q(\hat{sl}(2))$, Preprint 1992, hep-th 9208079.