

МОНОПОЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР ПОРЯДКА В $SU(2)$ РЕШЕТОЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

А.И.Веселов, М.И.Поликарпов, М.Н.Чернодуб

Институт теоретической и экспериментальной физики

117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 февраля 1996 г.

Мы представляем результаты численных расчетов для плотности вероятности распределения значений оператора рождения монополя Φ_{mon} в максимальной абелевой проекции $SU(2)$ решеточной глюодинамики. Оказывается, что при низкой температуре в фазе невылетания, максимум распределения соответствует ненулевому значению поля Φ_{mon} . Это означает, что эффективный потенциал имеет вид потенциала Хиггса. Выше точки фазового перехода минимум потенциала (максимум распределения оператора рождения монополя) соответствует нулевому значению поля монополя Φ_{mon} . Приведенные результаты являются прямым доказательством существования конденсата абелевых монополей в фазе невылетания глюодинамики и подтверждают гипотезу, что вакуум глюодинамики аналогичен дуальному сверхпроводнику.

PACS: 12.38.Aw, 12.38.Gc

Монопольный механизм невылетания цвета в решеточных теориях является сейчас общепринятым [1–4]. Однако существует еще много открытых вопросов. В решеточной глюодинамике для фазового перехода вылетание–невылетание весьма важно найти параметр порядка, построенный из оператора рождения монополя. Первым кандидатом является величина монопольного конденсата, которая должна быть отлична от нуля в фазе невылетания цвета и зануляться в точке фазового перехода. Для изучения необходим явный вид оператора $\Phi_{mon}(x)$, который рождает абелевый монополю в точке x . Оператор $\Phi_{mon}(x)$ был найден Фройлихом и Маркетти [5] для компактной электродинамики с действием Виллейна и исследовался численно в работах [6]. В разд.1 мы предлагаем оператор рождения монополя для произвольной абелевой проекции решеточной $SU(2)$ глюодинамики. Численные результаты, представленные в разд.2, получены для максимальной абелевой проекции. Численные расчеты показывают, что именно в этой проекции вакуум глюодинамики ведет себя как дуальный сверхпроводник (см., например, обзоры [3,4]). Отметим, что в работах [7] был предложен другой оператор рождения монополя, который отличается от изучаемого нами и не соответствует конструкции Фройлиха и Маркетти. Тем не менее, наши выводы и выводы работ [7] совпадают: монопольный конденсат существует в фазе невылетания цвета решеточной глюодинамики. Аналогичное утверждение было сделано в работе [8], где монопольный конденсат был рассчитан, исходя из перколяционных свойств монопольных токов.

1. *Оператор рождения монополя.* Ниже мы предлагаем формальную конструкцию оператора рождения монополя в абелевой проекции $SU(2)$ глюодинамики. Мы параметризуем $SU(2)$ матрицы стандартным образом: $U_{x\mu}^{11} = \cos \phi_{x\mu} e^{i\theta_{x\mu}}$; $U_{x\mu}^{12} = \sin \phi_{x\mu} e^{i\chi_{x\mu}}$; $U_{x\mu}^{22} = U_{x\mu}^{11*}$; $U_{x\mu}^{21} = -U_{x\mu}^{12*}$; $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $-\pi < \theta$, $\chi \leq \pi$. Плакетное действие выражается через углы ϕ , θ и χ в виде

$$S_P = \frac{1}{2} \text{Tr} U_1 U_2 U_3^+ U_4^+ = S^a + S^n + S^i, \quad (1)$$

где

$$S^a = S^a(\theta_P, \phi) = \cos \theta_P \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 \cos \phi_4, \quad (2)$$

S^n и S^i описывают взаимодействие полей θ и χ и самодействие полей χ [9]:

$$\theta_P = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4, \quad (3)$$

здесь индексы 1, ..., 4 соответствуют ребрам плакетов: $1 \rightarrow \{x, x + \hat{\mu}\}, \dots, 4 \rightarrow \{x, x + \hat{\nu}\}$.

Каждое из слагаемых S^a , S^n и S^i является инвариантным по отношению к оставшимся после фиксации калибровки $U(1)$ калибровочным преобразованиям:

$$\theta_{x\mu} \rightarrow \theta_{x\mu} + \alpha_x - \alpha_{x+\hat{\mu}}, \quad (4)$$

$$\chi_{x\mu} \rightarrow \chi_{x\mu} + \alpha_x + \alpha_{x+\hat{\mu}}. \quad (5)$$

Оператор рождения монополя в точке x дуальной решетки определяется следующим уравнением:

$$U(x) = \exp \{ \beta [-S^a(\theta_P, \phi) + S^a(\theta_P + W_P(x), \phi)] \}, \quad (6)$$

функция $W_P(x)$ определена в Приложении А (формула (П.8)). Учитывая (2), получаем:

$$U(x) = \exp \left\{ \sum_P \tilde{\beta} [-\cos(\theta_P) + \cos(\theta_P + W_P(x))] \right\}, \quad (7)$$

где $\tilde{\beta} = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 \cos \phi_4 \beta$. Эффективно, оператор рождения монополя сдвигает все абелевы плакетные углы θ_P .

Для компактной электродинамики с действием Виллсона предыдущее определение совпадает с определением Фройлиха и Маркетти [5]. Для общего вида действия в компактной электродинамике мы можем использовать описанную выше конструкцию. Доказательство представлено в Приложении А. Глюодинамика в абелевой проекции содержит компактное калибровочное поле θ и заряженное векторное поле χ . Действие (1), выраженное через поля θ и χ , является довольно нетривиальным, и на данный момент у нас нет доказательства, что изложенная выше конструкция оператора рождения монополя правильна в этом случае. Тем не менее, для весьма схожей абелевой модели Хиггса с произвольным видом действия такое доказательство существует и оно аналогично доказательству, изложенному в Приложении А. Более того, численные результаты, представленные в следующем разделе ясно показывают, что квантовое среднее предложенного оператора является параметром порядка для фазового перехода вылетание-невыветание.

2. Численные результаты. В этом разделе мы описываем результаты численных расчетов на решетке $10^3 \times 4$ с антипериодическими граничными

условиями по пространственным направлениям (так как оператор U может быть построен только во временном разрезе с антипериодическими граничными условиями в пространственных направлениях). Периодические граничные условия запрещены благодаря закону Гаусса: не существует решения уравнения (П.6) в конечном объеме с периодическими граничными условиями. Чтобы увидеть, что оператор U является параметром порядка для фазового перехода вылетание-невыветание, удобно изучить вероятность распределения этого оператора. Это означает, что мы должны посчитать среднее $\langle \delta(\varphi - U(x)) \rangle$. Заметим, что эффективный потенциал,

$$e^{-V_{eff}(\varphi)} = \langle \delta(\varphi - \frac{1}{V} \sum_x U(x)) \rangle, \quad (8)$$

имеет большее физическое значение, чем распределение вероятности. Расчет $V_{eff}(\varphi)$ весьма сложен, и мы представляем результаты вычислений величины $V(\varphi)$, определенной следующим образом:

$$e^{-V(\varphi)} = \langle \delta(\varphi - U(x)) \rangle. \quad (9)$$

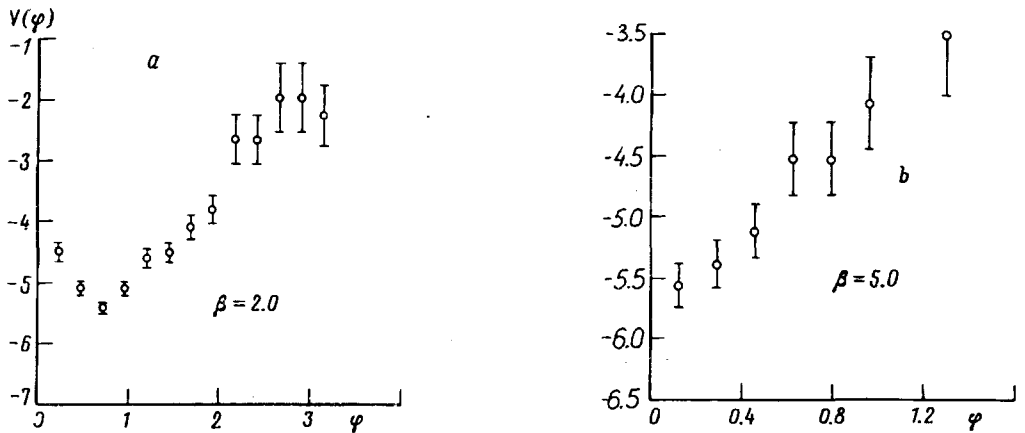


Рис.1. $V(\varphi)$ для фазы невыветания (а) и фазы выветания (б)

На рис.1а и б представлена функция $V(\varphi)$ для фаз невыветания и выветания. Ясно видно, что в фазе невыветания минимум $V(\varphi)$ наблюдается при $\varphi = \varphi_c \neq 0$, в то время как в фазе выветания $\varphi_c = 0$. Мы использовали положительно определенный оператор $U(x)$ (7), но в дуальном представлении теории оператор рождения монополя (П.5) не является положительно определенным, это несоответствие объясняется тем, что мы сделали обратное дуальное преобразование на бесконечной решетке. На конечной решетке возможно определить также неположительно определенный оператор $U(x)$, в этом случае вместо рис.1а мы получим потенциал типа Хиггса. В данный момент мы проводим эти немного более сложные вычисления. Рис.1а и б ясно показывают, что положение минимума $V(\varphi)$ играет роль параметра порядка. На рис.2 мы показываем зависимость положения минимума, φ_c , от температуры. Видно, что φ_c зануляется в точке фазового перехода, что означает, что конденсат монополей существует только в фазе невыветания!

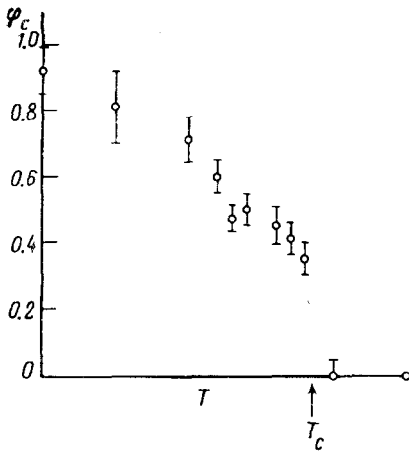


Рис.2. Зависимость φ_c от температуры T ; T_c – критическая температура

Приложение А. Начнем с производящего функционала компактной электродинамики:

$$Z = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{D}\theta \exp\{-S(d\theta)\}. \quad (\text{П.1})$$

Мы используем формализм дифференциальных форм на решетке [10] (см. также Приложение Б). Символ $\int \mathcal{D}\theta$ обозначает интеграл по всем реберным переменным θ . Континуальный интеграл дуальной теории,

$$Z^d = \sum_{*n(c_1) \in \mathbb{Z}} \exp\{-*S(d*n)\}, \quad (\text{П.2})$$

$$*S(p) = -\ln \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{D}F \exp\{-S(F) + i(F, p)\}, \quad (\text{П.3})$$

может быть представлен как следующий предел континуального интеграла Абеливой модели Хиггса:

$$Z^d = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{D}^* \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}^* B \sum_{*n(c_1) \in \mathbb{Z}} \exp\{-*S(d*B/2\pi) - \kappa \|*B - d*\varphi + 2\pi*n\|^2\}, \quad (\text{П.4})$$

где $*S(d*B/2\pi)$ обозначает кинетическую энергию дуального калибровочного поля $*B$ (аналог $\tilde{F}_{\mu\nu}^2$) и поле Хиггса $\exp\{i*\varphi\}$ несет магнитный заряд, так как оно взаимодействует с дуальным калибровочным полем $*B$ посредством ковариантной производной. Оператор Дирака [11],

$$U^d(x) = e^{i*\varphi} \cdot \exp\{-i(*D_x, *B)\}, \quad (\text{П.5})$$

$$\delta^* D_x = *\delta_x, \quad (\text{П.6})$$

является калибровочно инвариантным оператором рождения монополя. Он создает облако дуальных фотонов в точке x . В уравнении (П.5) $*\delta_x$ обозначает решеточную δ -функцию, она равняется единице в узле x дуальной решетки

и нулю в других узлах. Заметим, что в предыдущих формулах радиальная часть поля Хиггса, которая несет магнитный заряд, равна единице.

Возвращаясь к первоначальному представлению континуального интеграла (П.1) мы получим квантовое среднее оператора рождения монополя, выраженное через поля θ :

$$\langle U(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{D}\theta \exp \{-S(d\theta + W_P(x))\}, \quad (\text{П.7})$$

$$W_P(x) = 2\pi\delta\Delta^{-1}(D_x - \omega_x), \quad (\text{П.8})$$

где струна Дирака [5] представлена целочисленной 1-формой $^*\omega_x$, которая удовлетворяет уравнению $\delta^*\omega_x = ^*\delta_x$.

Континуальный интеграл (П.1) для электродинамики с общим видом действия может быть представлен как сумма по замкнутым монополярным токам [12]. Можно показать, что оператор $U(x)$ рождает незамкнутую монополярную траекторию, начинающуюся в точке x . Этот факт показывает, что оператор $U(x)$ является оператором рождения монополя.

Приложение Б. В настоящем Приложении приведены основные понятия теории дифференциальных форм на решетке [10]. Преимущества использования исчисления дифференциальных форм состоит в общности полученных выражений. Большинство преобразований не зависит ни от числа измерений пространства-времени, ни от ранга полей. С небольшими изменениями эти преобразования верны для любых типов решеток – они могут быть прямоугольными, треугольными, случайными и так далее.

На решетке дифференциальная k -форма ϕ_k определена на k -мерной ячейке c_k , то есть скалярное (калибровочное) поле является 0-формой (1-формой). Оператор внешнего дифференцирования d определен следующим образом:

$$(d\phi)(c_{k+1}) = \sum_{c_k \in \partial c_{k+1}} \phi(c_k).$$

Здесь символом ∂c_k обозначена ориентированная граница k -ячейки c_k . Таким образом, оператор d повышает ранг формы на единицу. Например, $d\varphi$ – реберная переменная построенная, как обычно, с помощью узловых переменных φ , и dA – плакетная переменная построенная из реберных переменных A . Скалярное произведение определено стандартным образом: если φ и ψ – k -формы, то $(\varphi, \psi) = \sum_{c_k} \varphi(c_k)\psi(c_k)$, где \sum_{c_k} – сумма по всем c_k .

Любому k -мерному объекту на D -мерной решетке соответствует $(D - k)$ -мерный объект, лежащий на дуальной решетке $^*C_{D-k}$. Ко-дифференциал $\delta = ^*d^*$ удовлетворяет интегральному правилу: $(\varphi, \delta\psi) = (d\varphi, \psi)$. Заметим, что $\delta\Phi(c_k)$ является $(k - 1)$ -формой и $\delta\Phi(c_0) = 0$. Норма определена как $\|a\|^2 = (a, a)$; поэтому $\|B - d\varphi + 2\pi n\|^2$ в (П.4) означает суммирование по всем ребрам. Символ $\sum_{l(c_1) \in \mathbb{Z}}$ обозначает сумму по всем конфигурациям целых чисел l , определенных на ребрах c_1 . Действие (П.4) инвариантно относительно калибровочных преобразований $B' = B + d\alpha$, $\varphi' = \varphi + \alpha$, благодаря известному свойству $d^2 = \delta^2 = 0$. Решеточный лапласиан определен формулой $\Delta = d\delta + \delta d$.

Авторы благодарны П. ван Баалу, А. Ди Джакомо, Р. Хаймекеру, Т. Иваненко, Й. Матсубаре, А. Починскому, Т. Сузуки и У. Визе за интересные обсуждения.

Работа частично финансировалась по гранту 93-02-03609 Российского фонда фундаментальных исследований, гранту MJM300 Международного научного фонда и грантам INTAS-94-0840, INTAS-94-2851. Авторы также благодарят Японскую Ассоциацию поддержки науки (JSPS) за финансовую помощь, полученную в рамках программы поддержки ученых бывшего СССР.

-
1. G. 't Hooft, *High Energy Physics*, Ed. A.Zichichi, Editrice Compositori, Bologna, 1976.
 2. S.Mandelstam, *Phys. Rep.* **23C**, 245 (1976).
 3. T.Suzuki, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **30**, 176 (1993).
 4. М.И.Поликарпов, *Усп. Физ. Наук* **165**, 627 (1995).
 5. J.Fröhlich and P.A.Marchetti, *Commun. Math. Phys.* **112**, 343 (1987).
 6. L.Polley and U.J.Wiese, *Nucl. Phys. B* **356**, 629 (1991); M.I.Polikarpov, L.Polley and U.J.Wiese, *Phys. Lett. B* **253**, 212 (1991).
 7. L.DelDebbio, A.Di.Giacomo, and G.Paffuti, *Phys. Lett. B* **349**, 513 (1995); L.DelDebbio, A.Di.Giacomo, G.Paffuti and P.Pieri, *Phys. Lett. B* **355**, 255 (1995).
 8. T.L.Ivanenko, A.V.Pochinsky, and M.I.Polikarpov, *Phys. Lett. B* **302**, 458 (1993).
 9. M.N.Chernodub, M.I.Polikarpov, and A.I.Veselov, *Phys. Lett. B* **342**, 303 (1995).
 10. P.Becher and H.Joos, *Z. Phys. C* **15**, 343 (1982).
 11. P.A.M.Dirac, *Canad. J. Phys.* **33**, 650 (1955).
 12. M.N.Chernodub, M.I.Polikarpov, and A.I.Veselov, preprint ITEP-TH-12/95, hep-lat/9512008, to be published in proc. of the workshop 'Non-perturbative approaches to QCD' at ECT* in Trento, July 10 - 28, 1995.