

## КРИТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В КОРРЕЛЯЦИИ ФОТОНОВ ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ

*Г.Ю.Крючкян, К.Г.Петросян, К.В.Херунцян*

*Институт физических исследований НАН Армении  
378410 Аштарак-2, Армения<sup>1)</sup>*

Поступила в редакцию 22 февраля 1996 г.

Развита точная квантовая теория невырожденной параметрической генерации в резонаторе с учетом квантовых шумов произвольного уровня. Обнаружено критическое поведение корреляторов второго порядка, описывающих эффекты корреляции фотонов, в пороговой области в бистабильном режиме генерации.

PACS: 42.65.-k

1. Явление корреляции фотонов в нелинейно-оптических процессах впервые исследовалось для параметрического рассеяния света в  $\chi^{(2)}$ -среде [1], приводящего к расщеплению фотона на пару фотонов. В настоящее время известны многочисленные следствия этого явления как в параметрическом рассеянии, так и в параметрической генерации света в резонаторе. В области квантовой оптики среди них следует отметить генерацию сжатого света [2] и подавление уровня квантовых флуктуаций в разности интенсивностей двух коррелированных мод поля излучения [3].

Явление межмодовой корреляции практически не исследовано для параметрической генерации в пороговой области, где существенно растет уровень и роль квантовых флуктуаций света. Имеются лишь несколько работ [4–6], вскользь касающихся этого вопроса в вырожденной и невырожденной параметрической генерации при отсутствии бистабильного режима [7,8] генерации. Из их результатов следует, что нормированные корреляционные функции второго порядка в зависимости от интенсивности поля накачки не имеют особенностей в пороговой области, в отличие от фактора Фано  $F = \langle (\Delta n)^2 \rangle / \langle n \rangle$  ( $\langle (\Delta n)^2 \rangle$  – дисперсия флуктуаций числа фотонов,  $\langle n \rangle$  – среднее число фотонов в моде), который в этой области имеет острый пик.

В настоящей работе в рамках нелинейной трактовки квантовых флуктуаций проведен точный квантостатистический анализ процесса невырожденной параметрической генерации в резонаторе. Полученные результаты применимы для произвольного уровня квантовых шумов во всей области генерации, включая пороговый режим. В отличие от результатов работы [6], они описывают также случай ненулевых расстройек резонатора, приводящих, как известно [7,8], к оптической бистабильности. Как показано ниже, в последнем случае корреляция фотонов генерируемых мод может существенно расти в припороговой области.

2. Рассматриваемый нами процесс невырожденной параметрической генерации в резонаторе основан на расщеплении фотона моды накачки с частотой  $\omega_3$  на два фотона генерируемых мод  $\omega_1, \omega_2$  ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ). В резонансном

<sup>1)</sup>e-mail: ifi@arminco.com

приближении он описывается следующим гамильтонианом [9]:

$$H = \sum_{i=1}^3 \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i + i \hbar k (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_1 a_2) + i \hbar (\epsilon e^{-i\omega_L t} a_3^\dagger - \epsilon^* e^{i\omega_L t} a_3) + \sum_{i=1}^3 (a_i \Gamma_i^\dagger + a_i^\dagger \Gamma_i). \quad (1)$$

Здесь  $a_i^\dagger, a_i$  – операторы рождения и уничтожения мод резонатора  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ ,  $k$  – коэффициент связи между модами, пропорциональный нелинейной восприимчивости второго порядка  $\chi^{(2)}$ ,  $\epsilon$  – комплексная амплитуда поля накачки на частоте  $\omega_L (\omega_L \approx \omega_3)$ ,  $\Gamma_i$  – операторы термостата, которыми определяются постоянные затухания  $\gamma_i$  мод в резонаторе.

Мы учитываем расстройки резонатора  $\Delta_3 = \omega_L - \omega_3$ ,  $\Delta_{1,2} = \omega_L/2 - \omega_{1,2}$  и считаем также, что мода накачки в резонаторе затухает намного быстрее, чем генерируемые моды ( $\gamma_3 \gg \gamma_1, \gamma_2$ ), в результате чего она может быть адиабатически исключена из рассмотрения. В этом случае с помощью стандартных процедур (см., например, [10]) получаем следующее уравнение Фоккера – Планка в так называемом комплексном  $P$ -представлении [11] матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\bar{\alpha}) = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ -\bar{\gamma}_1 \alpha_1 + \left( \frac{k\epsilon}{\bar{\gamma}_3} - \frac{k^2}{\bar{\gamma}_3} \alpha_1 \alpha_2 \right) \alpha_2^\dagger \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_1^\dagger} \times \right. \\ & \times \left[ -\bar{\gamma}_1^* \alpha_1^\dagger + \left( \frac{k\epsilon^*}{\bar{\gamma}_3^*} - \frac{k^2}{\bar{\gamma}_3^*} \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger \right) \alpha_2 \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \times \\ & \times \left[ -\bar{\gamma}_2 \alpha_2 + \left( \frac{k\epsilon}{\bar{\gamma}_3} - \frac{k^2}{\bar{\gamma}_3} \alpha_1 \alpha_2 \right) \alpha_1^\dagger \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_2^\dagger} \left[ -\bar{\gamma}_2^* \alpha_2^\dagger + \left( \frac{k\epsilon^*}{\bar{\gamma}_3^*} - \frac{k^2}{\bar{\gamma}_3^*} \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger \right) \alpha_1 \right] + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \left[ \frac{k\epsilon}{\bar{\gamma}_3} - \frac{k^2}{\bar{\gamma}_3} \alpha_1 \alpha_2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^\dagger \partial \alpha_2^\dagger} \left[ \frac{k\epsilon^*}{\bar{\gamma}_3^*} - \frac{k^2}{\bar{\gamma}_3^*} \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger \right] \right\} P(\bar{\alpha}). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_1^\dagger, \alpha_2, \alpha_2^\dagger)$ ,  $\alpha_i, \alpha_i^\dagger (i = 1, 2)$  – независимые комплексные переменные, соответствующие операторам  $\alpha_i, \alpha_i^\dagger$ ;  $\bar{\gamma}_i = \gamma_i - i\Delta_i$ . С целью нахождения стационарного решения уравнения (2) далее рассматривается случай равных постоянных затухания  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$  и расстроек  $\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta$  ( $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 \equiv \bar{\gamma}$ ) и используется метод потенциальных уравнений [10]. В этом случае потенциальные условия выполняются, и для указанного решения получаем

$$P_S(\bar{\alpha}) = N (\epsilon - k\alpha_1 \alpha_2)^\lambda (\epsilon^* - k\alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger)^\lambda e^{2(\alpha_1^\dagger \alpha_1 + \alpha_2^\dagger \alpha_2)}, \quad (3)$$

где  $\lambda = -1 + 2\bar{\gamma}\bar{\gamma}_3/k^2$ , а  $N$  – постоянная нормировки. Используя выражение для моментов нормально-упорядоченных произведений операторов  $\alpha_1 \alpha_2$  через  $P$ -представление [10], с помощью выражения (3), после интегрирований в комплексной плоскости, проводимых аналогично работе [6], получаем:

$$\begin{aligned} \langle a_1^{+m} a_1^m a_2^{+n} a_2^n \rangle = & N_0 \left( \frac{\epsilon}{k} \right)^n \left( \frac{\epsilon^*}{k} \right)^m \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+\lambda+2)\Gamma(m+\lambda^*+2)} \times \\ & \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(n+1)_l (m+1)_{l+n-m}}{(n+\lambda+2)_l (m+\lambda^*+2)_{l+n-m}} \frac{(2\epsilon/k)^l (2\epsilon^*/k)^{l+n-m}}{l!(l+n-m)!}, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$N_0 = \frac{1}{|\Gamma(\lambda+2)|^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{|(\lambda+2)_l|^2} \left( \frac{2|\epsilon|}{k} \right)^{2l},$$

$\Gamma(z)$  - гамма-функция и  $(n)_l = n(n+1)\dots(n+l-1)$ .

3. Приведем вначале стационарные устойчивые решения для амплитуд мод  $\omega_1, \omega_2$  в полуклассическом приближении [7], без учета квантовых шумов. При  $|\epsilon| < \epsilon_{th}$  ( $\epsilon_{th} = |\sqrt{\gamma\gamma_3}|/k$  - пороговое значение поля накачки) амплитуды мод равны нулю, что соответствует режиму возбуждения мод на уровне спонтанных шумов. При  $|\epsilon| > \epsilon_{th}$  реализуется надпороговый режим генерации. Интенсивности мод  $\omega_1$  и  $\omega_2$  на выходе из резонатора в единицах среднего числа фотонов в единицу времени равны друг другу и имеют следующий вид:

$$I^{out} = \frac{2\gamma^2\gamma_3}{k^2} \left( -1 + \frac{\Delta\Delta_3}{\gamma\gamma_3} + \sqrt{\left(\frac{k|\epsilon|}{\gamma\gamma_3}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{\gamma} + \frac{\Delta_3}{\gamma_3}\right)^2} \right). \quad (5)$$

Соответствующие стационарные фазы  $\varphi_1, \varphi_2$  генерируемых мод удовлетворяют следующему выражению:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi) = \frac{\gamma\Delta_3 + \gamma_3\Delta}{k|\epsilon|}, \quad (6)$$

где  $\varphi$  - фаза поля накачки.

При  $\gamma\gamma_3 - \Delta\Delta_3 < 0$  области устойчивости нулевого и надпорогового решений перекрываются, и, следовательно, в системе реализуется оптическая бистабильность [7,8]. Результат для интенсивности  $I^{out}$  в полуклассическом приближении приведен на рис.1 (кривые 1,2).

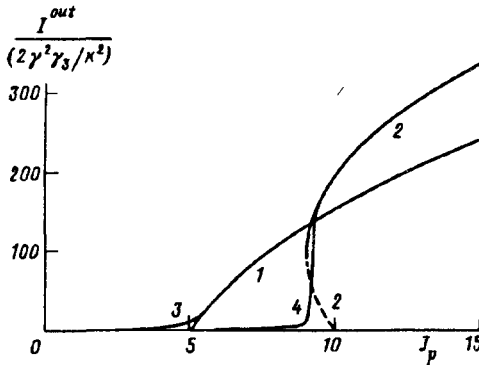


Рис.1. Нормированная интенсивность генерируемых мод  $I^{out}/(2\gamma^2\gamma_3/k^2)$  в зависимости от безразмерного параметра интенсивности накачки  $J_p = (k|\epsilon|/\gamma\gamma_3)^2$  при  $\Delta_3/\gamma_3 = 2$ . Кривые 1,2 описывают полуклассический результат при  $\Delta/\gamma = 0.1$  и  $\Delta/\gamma = 1$ , соответственно; штрихи на кривой 2 описывают неустойчивое полуклассическое решение. Кривые 3 и 4 представляют квантовомеханическую среднюю интенсивность мод при  $k^2/\gamma\gamma_3 = 0.01$  и приведены для тех же  $\Delta/\gamma$ , что и кривые 1,2, соответственно

Квантовомеханический результат для средней интенсивности мод

$$I^{out} \equiv 2\gamma \langle n_1 \rangle = 2\gamma \langle n_2 \rangle,$$

где  $n_i = a_i^+ a_i$ , ( $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle \equiv \langle n \rangle$ ), получается из общей формулы (4) при  $m = 1$ ,  $n = 0$  ( $n = 1$ ,  $m = 0$ ) и также приведен на рис.1 (кривые 3,4). Мы видим, что квантовомеханическая средняя интенсивность отличается от полуклассического результата в пороговой области и, кроме того, не проявляет гистерезисной зависимости при  $\gamma\gamma_3 - \Delta\Delta_3 < 0$ . Такой результат является общим для бистабильных систем (см., например, [12]).

4. Эффекты корреляций фотонов в каждой из мод, а также между двумя модами исследуются с помощью нормированных корреляторов второго порядка:

$$g_{ii}^{(2)} = \frac{\langle a_i^{+2} a_i^2 \rangle}{\langle a_i^+ a_i \rangle^2}, \quad g_{12}^{(2)} = \frac{\langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle}{\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle} \quad (i = 1, 2).$$

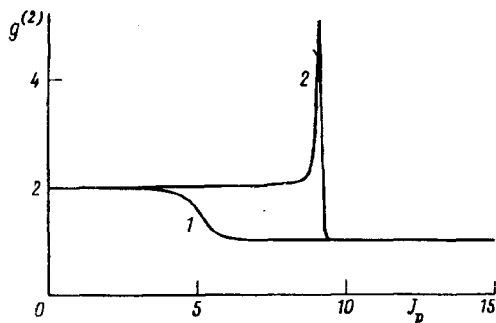


Рис.2. Зависимость автокоррелятора  $g^{(2)}$  от  $J_p$  при  $k^2/\gamma\gamma_3 = 0.01$  и  $\Delta_3/\gamma_3 = 2$ : кривая 1 -  $\Delta/\gamma = 0.1$ ; 2 -  $\Delta/\gamma = 1$

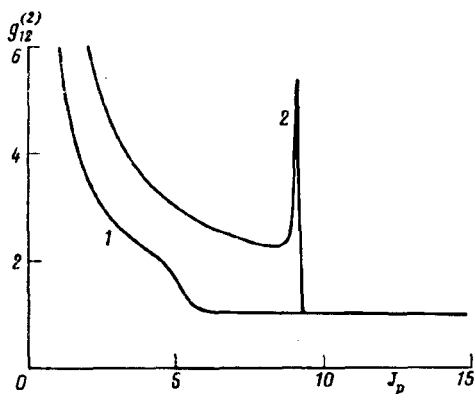


Рис.3. Зависимость кросс-коррелятора  $g_{12}^{(2)}$  от  $J_p$  для тех же значений параметров, что и на рис.2

Вычисление последних проводится на основе общего результата (4), что дает, в частности,  $g_{11}^{(2)} = g_{22}^{(2)} \equiv g^{(2)}$ . Численные результаты в графической форме приведены на рис.2 и 3. Они демонстрируют новые качественные эффекты при  $\gamma\gamma_3 - \Delta\Delta_3 < 0$ , когда согласно полуклассическим результатам, реализуется оптическая бистабильность: в корреляторах наблюдается появление пиков в критической или пороговой областях генерации. При  $\gamma\gamma_3 - \Delta\Delta_3 > 0$ , когда бистабильность отсутствует, корреляторы не имеют критического поведения (пиков) в пороговой области. Как известно, корреляторы  $g^{(2)}, g_{12}^{(2)}$  описывают отношение числа пар фотонов, излученных одновременно, к произведению числа фотонов, излученных независимо друг от друга. Поэтому критический рост корреляторов означает, что число излученных пар фотонов в области бистабильного поведения интенсивности существенно растет вследствие того, что система может излучать, находясь в двух различных энергетических состояниях, между которыми имеет место квантовое туннелирование.

В области ниже порога генерации  $|\epsilon| < \epsilon_{th}$  коррелятор  $g^{(2)}$  описывает группировку фотонов ( $g^{(2)} \approx 2$  при  $|\epsilon| \ll \epsilon_{th}$ ), что является, конечно, отражением гауссовской статистики фотонов каждой из мод. Поведение коррелятора  $g_{12}^{(2)}$  при  $|\epsilon| < \epsilon_{th}$  описывает сверхгруппировку фотонов, природа которой соответствует парному рождению фотонов  $\omega_1, \omega_2$  в режиме спонтанного параметрического возбуждения мод. В надпороговой области  $|\epsilon| \gg \epsilon_{th}$  корреляторы описывают квантовую статистику когерентных состояний ( $g^{(2)}, g_{12}^{(2)} \rightarrow 1$ ).

Как можно убедиться непосредственным расчетом с помощью (4), для всех значений параметров между корреляторами имеет место следующее соотношение:

$$g_{12}^{(2)} = g^{(2)} + \frac{1}{2 \langle n \rangle}. \quad (7)$$

Это соотношение демонстрирует нарушение классического неравенства Коши - Шварца (см., например, [6]) во всей области рассмотрения и приводит к следующему интересному эффекту. Как известно [3], корреляция мгновенных флуктуаций чисел фотонов двух мод отражается в дисперсии флуктуаций разности чисел фотонов. Для рассматриваемой системы указанная дисперсия,

нормированная на уровень флуктуаций для когерентных состояний, оказывается равной

$$V \equiv \frac{\langle \Delta(n_1 - n_2)^2 \rangle}{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle} = 1 + \langle n \rangle (g^{(2)} - g_{12}^{(2)}). \quad (8)$$

Как следствие результата (7), получаем  $V = 1/2$ . Таким образом, для рассматриваемой системы имеет место подавление уровня квантовых флуктуаций в разности чисел фотонов ниже когерентного уровня на 50% для всей области генерации и произвольных значений параметров. Существенно, что этот результат получен в точной квантовой теории без обращения к линейной трактовке квантовых флуктуаций.

Таким образом, одним из основных следствий из полученных результатов, на наш взгляд, является возможность получения сильно коррелированных пучков света в припороговой области генерации, где интенсивности мод существенно растут. Такое поведение в корреляции фотонов качественно отличается от известного эффекта сверхгруппировки в далеко предпороговой области – в режиме возбуждения мод на уровне спонтанных шумов, где интенсивности мод малы.

- 
1. Д.Н.Клышко, *Фотоны и нелинейная оптика*, М.: Наука, 1980.
  2. Ling-An Wu, Min Xiao, and H.J.Kimble, *J. Opt. Soc. Am.* B4, 1465 (1987).
  3. A.Heidmann, R.J.Horowicz, S.Reynaud et al., *Phys. Rev. Lett.* 59, 2555 (1987).
  4. P.D.Drummond, K.J.McNeil, and D.F.Walls, *Optica Acta* 28, 211 (1981).
  5. G.J.Milburn and D.F.Walls, *Phys. Rev.* A27, 392 (1983).
  6. K.J.McNeil and C.W.Gardiner, *Phys. Rev.* A28, 1560 (1983).
  7. L.A.Lugiato, C.Oldano, C.Fabre et al., *Nuovo Cim.* 10, 959 (1988).
  8. C.Richy, K.I.Petsas, E.Giacobino et al., *J. Opt. Soc. Am.* B12, 456 (1995).
  9. M.D.Reid and P.D.Drummond, *Phys. Rev.* A40, 4493 (1989).
  10. К.В.Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, М.: Мир, 1986.
  11. P.D.Drummond and C.W.Gardiner, *J. Phys.* A13, 2353 (1980).
  12. L.A.Lugiato, In *Progr. in Optics*, 21, Ed. E.Wolf, Amsterdam, North-Holland, 1984.