Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.7, стр.517 - 522 © 1996г. 10 апреля

ФИЗИКА УСИЛЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Г.Д.Чагелишвили+, Р.Г.Чанишвили*, Дж.Г.Ломинадзе**

**Абастуманская астрофизическая обсерватория, Академия Наук Грузии*
380060 Тбилиси, Грузия

+Институт космических исследований РАН
117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 января 1996 г.
После переработки 12 марта 1996 г.

Излагается физика линейного механизма усиления вихревых возмущений в сдвиговых течениях, обусловленного неортогональностью собственных функций задачи при линейной динамике. Для получения наиболее наглядной и простой картины рассмотрено параллельное течение с линейным сдвигом скорости, а для вихревых возмущений использовано представление в виде плоских волн – пространственных фурье-гармоник. В этом плане наш физический подход является созвучным с немодальным математическим анализом линейных процессов в сдвиговых течениях, активно культивирующимся в последние годы. Изложенная физика позволяет понять причину немонотонного, временного роста вихревых возмущений на линейной стадии эволюции. Кроме того, являясь универсальным, использованный в работе "язык" применим и для объяснения усиления потенциальных (акустических) возмущений.

PACS: 47.20.Ft

Интерес к сдвиговым течениям обусловлен их повсеместной реализацией как в астрофизических объектах и околоземном пространстве (в галактиках, звездах, струйных выбросах, атмосферах планет, мировом океане и т.д.), так и в лабораторных и технических устройствах (в токамаках, МГД генераторах, нефтепроводах и т.д.). Существование сдвига скорости в течении является мощным источником разнообразных энергоемких процессов, теоретическое осмысление которых, несмотря на вековую историю исследований, затруднено. Это относится даже к линейным процессам, протекающим в наипростейшей модели сдвиговых течений – в параллельном течении с линейным сдвигом скорости. В последнее время была математически строго выявлена [1] специфика сдвиговых течений, которая приводила к затруднениям при использовании канонического, модального анализа линейных явлений, то есть при разложении возмущенных величин в интеграл Фурье *во времени*. Дело в том, что операторы, которые возникают при подобном математическом описании линейных процессов в сдвиговых течениях, являются несамосопряженными [2], в результате чего собственные функции этих операторов не ортогональны друг к другу и сильно интерферируют меж собой. Одним из результатов этого факта является то обстоятельство, что, даже если все собственные функции убывают монотонно во времени (то есть комплексные части всех собственных частот являются отрицательными), частное решение может демонстрировать большой относительный рост на конечном интервале времени. Следовательно, с помощью анализа отдельных собственных функций и собственных значений нельзя судить о линейной стадии эволюции возмущений в течении. А расчет результатов интерференции, как правило, является задачей непреодолимой трудности. Именно осознание этого обстоятельства дало импульс для использования немодального анализа эволюции возмущений в сдвиговых течениях (в первую очередь, в модели параллельного течения с линейным сдвигом скорости). При немодальном подходе исследуется эволюция пространственных фурье-гармоник (ПФГ) возмущений без какого-либо спектрального разложения во времени. Являясь оптимальным "языком", немодальный подход максимально упрощает математическое описание динамики возмущений в сдвиговых течениях и позволяет "уловить" ключевые явления (в частности, явления, обусловленные неортогональностью линейной динамики), которые ускользали из виду при модальном анализе. В рамках этого подхода уже получено много новых, неожиданных результатов, касающихся эволюции как вихревых [3-11], так и звуковых [12] возмущений; его с успехом используют и для изучения МГД волн [13-15]; сформулирована новая концепция турбулизации сдвиговых течений [16-19]; открыт новый механизм линейной трансформации волн в сдвиговых течениях [20-22]. Первым из этих результатов было описание линейной эволюции вихревых возмущений в неограниченном течении Куэтта (в параллельном течении с линейным сдвигом скорости). Были выявлены два базовых процесса линейной стадии эволюции ПФГ в недиссипативной среде: а) изменение пространственных характеристик ПФГ во времени и б) обмен энергии между ПФГ и средним течением.

Целью данной работы является описание физики черпания энергии сдвига вихревыми возмущениями. Но прежде чем займемся изложением основного содержания работы, приведем математическое описание процессов а) и б): а) *Волновое число ПФГ вдоль оси, ортогональной течению (то есть вдоль сдвига скорости), меняется во времени. Можно сказать, что в линейном приближении существует "дрейф" ПФГ в* k*-пространстве (в пространстве волновых чисел).*

Действительно (см.[3-8]), в параллельных течениях с линейным сдвигом скорости

$$\mathbf{U}_0 = (Ay, 0, 0) \tag{1}$$

(A – параметр сдвига, который будем считать положительным) возмущения не имеют форму простой волны из-за поворота ее гребня, обусловленного неоднородным характером течения. В таком случае волновое число ПФГ зависит от времени [2-8]: если в начальный момент времени возмущена пространственная фурье-гармоника с волновыми числами k_x, $k_y(0)$ и k_z:

$$v_x(0) = \tilde{v}_x(k_x, k_y(0), k_z, 0)\exp(ik_x x + ik_y(0)y + ik_z z), \tag{2}$$

то для $t > 0$ эволюция ее фазы определяется уравнениями

$$v_x(t) \sim \exp(ik_x x + ik_y(t)y + ik_z z), \tag{3}$$

$$k_y(t) = k_y(0) - k_x At, \tag{4}$$

которые и описывают "линейный дрейф" ПФГ в пространстве волновых чисел. Значения пространственных характеристик $(k_x, k_y(t), k_z)$ во многом определяют интенсивность обмена энергии между ПФГ и сдвиговым течением. Следовательно, линейный дрейф приводит к изменению интенсивности этого обмена. б) *Не все ПФГ могут черпать энергию сдвига и усиливаться. Усиливаются только те, которые находятся в определенной области* k*-пространства (именуемой в дальнейшем "областью усиления"). Притом, каждая из ПФГ усиливается в течение ограниченного промежутка времени, пока она не покинет область усиления в результате линейного дрейфа. К тому же,* *нахождение ПФГ в этой области в основном накладывает условия на направление (а не на величину) их волнового вектора. Следовательно, процесс обмена энергии между вихревыми возмущениями и сдвиговым течением имеет ярко выраженный анизотропный характер в* k*-пространстве.*

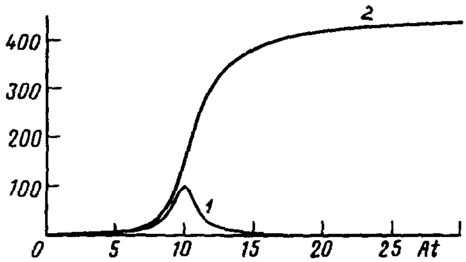

Рис.1. Эволюции нормализованной (на начальное значение) энергии двумерных (кривая *1*) и трехмерных (кривая *2*) ПФГ. Двумерная ПФГ с параметрами: $k_y(0)/k_x = 10$; $k_z = 0$; $\tilde{v}_x(0)/\tilde{v}_y(0) = -10$. Трехмерная ПФГ с параметрами: $k_y(0)/k_x = 10$; $k_z/k_x = 1$; $\tilde{v}_z(0)/\tilde{v}_y(0) = -5$

Итак, рассматриваемые возмущения на линейной стадии эволюции черпают энергию сдвига и усиливаются в течение лишь ограниченного промежутка времени, испытывая временный рост. Есть существенная разница в динамике двумерных и трехмерных ПФГ, которая хорошо прослеживается сравнением эволюции их энергии, приведенном на рис.1. Рассмотрены ПФГ, которые в начальный момент времени удовлетворяют неравенству $k_y(0)/k_x = 10 \gg 1$. Из-за линейного дрейфа со временем $k_y(t)$ начинает уменьшаться. Но пока $k_y(t) \gg k_x$, энергообмен между течением и ПФГ несуществен. А для времен, когда уже $k_y(t) \approx k_x$, как двумерные, так и трехмерные ПФГ начинают интенсивно черпать энергию сдвига и усиливаться. Усиление двумерных ПФГ прекращается в момент времени, когда $k_y(t) = 0$ (см. рис.1, когда $At = 10$). А затем, при $k_y(t)/k_x < 0$, они возвращают энергию среде. Что касается трехмерных ПФГ, то они и при $k_y(t)/k_x < 0$ продолжают усиливаться. Реально это усиление длится до времени, когда $k_y(t) \approx -k_x$. То есть область усиления в k-пространстве для трехмерных ПФГ шире, чем для двумерных. Более того, энергия трехмерных ПФГ, в отличие от двумерных, после прохождения области усиления не уменьшается (трехмерные ПФГ *не возвращают* энергию течению), а насыщается и стремится к величине, которая намного больше начального значения. Эти рассуждения справедливы для идеальной жидкости. Но в действительности, с увеличением $|k_y(t)|$ (когда $|k_y(t)| \to \infty$), вязкая диссипация становится существенной и (если не включатся новые явления, например нелинейные) превращает энергию трехмерных ПФГ в тепло.

В основу обмена энергии между вихревыми возмущениями и сдвиговым течением лежит так называемый "лифт-ап"-механизм [23], когда возмущения переносят жидкость из областей с большой скоростью течения в области с меньшей скоростью, и наоборот. Для полного и детального осмысления физики этого процесса необходимо использование адекватного "языка" ее описания. Обычно, раз вопрос касается вихревых возмущений, физику процесса стараются объяснить на примере вихрей. Но вихри не являются "элементами" процесса энергообмена. Следовательно, "язык" вихрей не является адекватным. Интересно заметить, что несмотря на существенную разницу между резонансом Ландау и обсуждаемым энергообменом, последний, как и резонанс Ландау, может быть точно и наглядно объяснен на примере плоских волн (а не вихрей), а точнее, на примере ПФГ.

Затухание Ландау является чисто кинетическим явлением и его физика объясняется на примере взаимодействия (обмена импульса) заряженных частиц с электрическим полем плоских волн – с коллективным полем, которое, в свою очередь, обусловлено возмущенным движением тех же частиц. А обсуждаемый нами процесс происходит в непрерывной гидродинамической среде и для его объяснения целесообразно использовать понятие виртуальных жидких частиц. Роль коллективного поля, в нашем случае, играет возмущенное поле давления – существование градиента этого поля и обусловливает изменения импульса виртуальных жидких частиц. Следует также отметить, что использованный "язык" описания (в терминах плоских волн, а не вихрей), являясь общим, применим и для акустических волн, которые также интенсивно обмениваются энергией со сдвиговым течением [12].

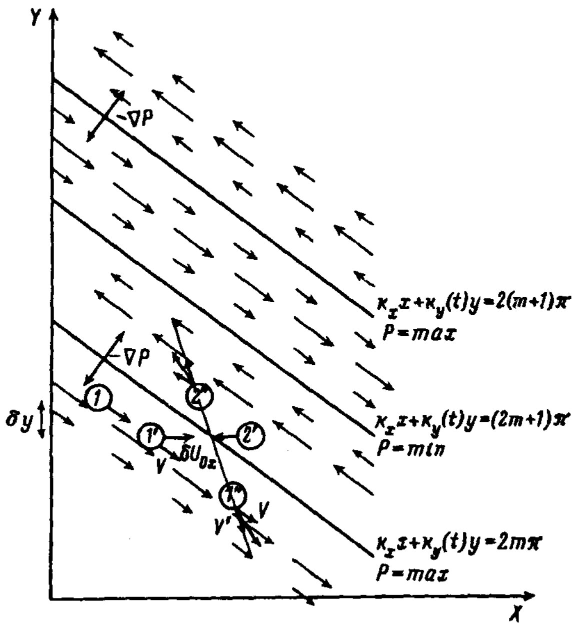

Рис.2. Качественный рисунок, иллюстрирующий переход энергии сдвигового течения к пространственным фурье-гармоникам вихревых возмущений. Линии $k_x x + k_y(t)y = 2m\pi; (2m+1)\pi; (2m+2)\pi$ представляют пересечение соответствующих плоскостей равных фаз с плоскостью $Z = 0$. Кружки 1, $1'$ и $1''$ обозначают одну и ту же виртуальную частицу в разные моменты времени

Вначале опишем физику в двумерном случае, когда процесс происходит в плоскости XY. Для достижения этой цели рассмотрим плоскости равных фаз пространственной фурье-гармоники, то есть плоскости, в каждой точке которых фаза гармоники в любой момент времени имеет одно и то же значение: $k_x x + k_y(t)y = 2m\pi$ и $k_x x + k_y(t)y = (2m+1)\pi$, где $m = 0, \pm1, \pm2...$ (см. рис.2). Следует отметить, что для двумерных ПФГ ($k_x, k_y \neq 0; k_z = 0$) плоскости равных фаз перпендикулярны к плоскости XY. К тому же, из-за зависимости $k_y(t)$ от времени каждая из плоскостей равных фаз поворачивается вокруг оси, параллельной оси Z. Из условия несжимаемости ($\mathbf{kv} = 0$; так как рассматриваем одну ПФГ: $\mathbf{v} \equiv \tilde{\mathbf{v}} \exp[i(k_x x + k_y(t)y)] +$ к.с.) следует, что векторы тока возмущения параллельны плоскостям равных фаз. Направления этих векторов, так же как и направления сил давления гармоники, приведены на рис.2. Приведенные на том же рисунке плоскости равных фаз, к тому же, являются плоскостями максимумов или минимумов давления ПФГ. Поэтому силы градиента давления ($-\nabla p$) ортогональны к ним. Следует подчеркнуть, что исходя из симметрии задачи плоскости $p = \max$ являются непроходимыми барьерами – можно сказать "стенками" – для жидких частиц. Принимая также во внимание тот факт, что силы давления $(-\nabla p)$ направлены перпендикулярно этим плоскостям, легко понять, что *плоскости $p = \max$ можно интерпретировать как стены, упруго отражающие сталкивающиеся с ними жидкие частицы.*

Итак, как энергия сдвига переходит в энергию возмущений?

Выделим виртуальную жидкую частицу (кружок *1* на рис.2), скорость возмущения которой $\mathbf{v}$ и которая находится на расстоянии y от оси X. Невозмущенная скорость этой частицы равна $U_{0x} = Ay$. Как видно из рис.2, наличие скорости возмущения $\mathbf{v}$ обусловливает смещение выделенной частицы вдоль оси Y. Можно сказать, что по истечении некоего малого времени частица сместится до уровня, где скорость течения равна $U'_{0x} = A(y - \delta y)$. Легко понять, что скорость нашей частицы (см. кружок *1'* на рис.2) на величину $\delta U_{0x} = A\delta y$ больше, нежели скорость среднего течения на том же уровне. Эта дополнительная скорость и есть та скорость, с которой выделенная частица сталкивается со стенкой $p = \max$. В результате упругого отражения от стенки полная скорость жидкой частицы (см. кружок *1''* на рис.2)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}'_{0x} + \mathbf{v} + \mathbf{v}', \tag{5}$$

где $|\mathbf{v}'| = A\delta y$. Итак, скорость возмущения рассматриваемой частицы изменилась на величину $\mathbf{v}'(v'_x, v'_y)$ и стала равной $\mathbf{v}+\mathbf{v}'$ (см. рис.2). В рассмотренном случае $(k_y/k_x > 0)$ угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ меньше, чем $\pi/2$. Именно поэтому выполняется условие $|\mathbf{v}+\mathbf{v}'| > |\mathbf{v}|$, то есть скорость (следовательно, и энергия) возмущения выделенной виртуальной частицы увеличилась за счет среднего течения. Изменение скорости возмущения жидкой частицы *2*, выделенной на том же рисунке, можно описать аналогично. Естественно, что увеличение энергии возмущения виртуальных частиц равносильно усилению ПФГ.

Более глубокий анализ изложенного процесса позволяет понять, что в действительности упруго отражающая стенка является "посредником" процесса обмена импульса между жидкими частицами, расположенными с разных сторон стенки $p = \max$. Например, описанный выше случай можно толковать как упругое столкновение частиц *1* и *2* (приведенных на рис.2) между собой.

Идея о том, что обмен импульсами между виртуальными частицами жидкости является ключом разгадки еще не осмысленных процессов в некоторых сдвиговых течениях, была высказана Я.Б. Зельдовичем [24]. Конкретно, движение вещества в аккреционных дисках компактных объектов (кеплеровское вращение) по законам канонической линейной теории (модального анализа) считалось устойчивым по отношению к коротковолновым вихревым возмущениям. Следовательно, кеплеровский характер вращения считался неспособным породить турбулентность (хотя наблюдения двойных систем с дисковой аккрецией указывают на обратное). Наперекор принятым представлениям, в работе Зельдовича [24] обсуждается возможность нарастания вихревых возмущений (с дальнейшей турбулизацией аккреционных дисков) *при условии существования обмена импульсами между частицами жидкости.* Математическое подтверждение возможности нарастания вихревых возмущений в аккреционных дисках приводится в работе [7]. А последовательная физическая картина процесса изложена в данной работе.

Из приведенных выше рассуждений следует, что при $k_y(t)/k_x < 0$ энергия двумерных ПФГ уменьшается. Действительно, легко убедиться, что при $k_y(t)/k_x < 0$, угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ больше $\pi/2$. Поэтому в этом случае

$|\mathbf{v}+\mathbf{v}'| < |\mathbf{v}|$, то есть энергия возмущения виртуальных частиц (вслед за ними и энергия ПФГ) уменьшается.

Физика обмена энергии между трехмерными ПФГ и средним течением та же, что и для двумерных ПФГ. Но в трехмерном случае, когда $k_z \neq 0$, плоскости равных фаз ($k_x x + k_y(t) y + k_z z = \mathrm{const}$) больше не являются ортогональными к плоскости XY. К тому же, с изменением $k_y(t)$ они вращаются более сложным образом (а не вокруг оси, параллельной оси Z, как это было в двумерном случае). Так что в трехмерном случае, после упругого отражения жидких частиц от плоскостей $p = \max$, угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ остается $< \pi/2$, даже когда $k_y(t)/k_x < 0$, что ведет к выполнению условия $|\mathbf{v}+\mathbf{v}'| > |\mathbf{v}|$. Следовательно, в трехмерном случае энергия виртуальных частиц увеличивается также при $k_y(t)/k_x < 0$. Это объясняет факт, отмеченный вначале (см. рис.1): при $k_y(t)/k_x < 0$ энергия трехмерных ПФГ не уменьшается, а продолжает расти, и в пределе $t \to \infty$ она не исчезает (в отличие от двумерных ПФГ), а насыщается и может стать намного больше, чем начальная энергия. В наших рассуждениях мы пренебрегли влиянием вязкости, что справедливо при небольших (определяемых числом Рейнольдса) значениях k_x, k_y и k_z. Как указывалось в начальной части работы, с увеличением $|k_y(t)|$ учет вязкой диссипации становится необходимым.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства науки РФ, а также гранта RVO300 Международного научного фонда.

---

1. S.C.Reddy, P.J.Schmid, and D.S.Hennington, SIAM J. Appl. Math. **53**, 15 (1993).
2. L.N.Trefethen, A.E.Trefethen, S.C.Reddy, and T.A.Driscoll, Science **261**, 578 (1993).
3. K.Moffatt, in *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, Eds A.M.Yaglom and V.I.Tatarskii, Nauka Press, Moscow, 1967.
4. S.Marcus and W.H.Press, J.Fluid Mech. **79**, 525 (1977).
5. A.D.D.Craik and W.O.Criminale, Proc. R. Soc. Lond. **A406**, 13 (1986).
6. В.А.Городцов, Механика жидкости и газа **2**, 941 (1988).
7. Дж.Г.Ломинадзе, Г.Д.Чагелишвили, Р.Г.Чанишвили, Письма в АЖ **14**, 856 (1988) [Sov. Astron. Lett. **14**, 364 (1988)].
8. G.D.Chagelishvili, R.G.Chanishvili, J.G.Lominadze, and I.N.Segal, Proc. of the fourth Intern. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion, held in Toki, Japan, 17-20 November, 1992 (ESA SP-351, 1993).
9. K.M.Butler and B.F.Farrell, Phys. Fluids A **4**, 1637 (1992).
10. L.H.Gustavsson, J.Fluid Mech. **224**, 241 (1991).
11. S.C.Reddy and D.S.Henningson, J.Fluid Mech. **252**, 209 (1993).
12. G.D.Chagelishvili, A.D.Rogava, and I.N.Segal, Phys. Rev. E **50**, R4283 (1994).
13. G.D.Chagelishvili, T.S.Christov, R.G.Chanishvili, and J.G.Lominadze, Phys. Rev. E **47**, 366 (1993).
14. S.A.Balbus and J.H.Hawley, Ap.J. **400**, 610 (1992).
15. S.H.Lubow and H.C.Spruit, Ap.J. **445**, 337 (1995).
16. G.D.Chagelishvili, R.G.Chanishvili, and J.G.Lominadze, In *High Energy Astrophysics: American and Soviet Perspectives*, Washington, National Academy Press, 1991.
17. T.Gebhardt and S.Grossmann, Phys. Rev. E **50**, 3705 (1994).
18. J.S.Baggett, T.A.Driscoll, and L.N.Trefethen, Phys. Fluids **7**, 833 (1995).
19. G.D.Chagelishvili, R.G.Chanishvili, T.S.Christov et al., Phys. Rev. E, submitted (Preprint - 126 of Space Research Institute, Moscow (1995)).
20. G.D.Chagelishvili, A.D.Rogava, and D.G.Tsiklauri, Phys. Rev. E, in press.
21. Г.Д.Чагелишвили, О.Г.Чхетиани, Письма в ЖЭТФ **62**, 294 (1995). [JETP Lett. **62**, 301 (1995)].
22. A.D.Rogava and S.Mahajan, Phys. Rev. E, submitted.
23. M.T.Landahl, SIAM J. Appl. Maths. **28**, 735 (1975).
24. Y.B. Zel'dovich, Proc. of the Royal Society **A 374**, 299 (1981).