

ИЗБЫТОЧНЫЙ $(1/f)$ ШУМ В СИСТЕМАХ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ШИРОКИМ СПЕКТРОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ДВОЙНАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ПЕРКОЛЯЦИОННО-ПОДОБНОГО ИНДЕКСА ШУМА

А.А.Снарский¹⁾, А.Колек*²⁾

Национальный технический университет Украины - "КПИ"
252056 Киев, Украина

*Politechnika Rzeszowska
35-959 Rzeszow, Poland

Поступила в редакцию 30 июня 1995 г.

После переработки 14 марта 1996 г.

Теоретически рассмотрен избыточный $(1/f)$ шум в случайной решетке с сопротивлениями связей $\tau \sim \exp(-\lambda x)$, где x - случайная переменная и $\lambda \gg 1$. Показано, что если коррелятор $\{\delta\tau^2\} \sim \tau^{\theta+2}$, то относительная спектральная плотность шума системы $C_e \sim \lambda^m \exp(-\lambda(1-p_c))$, где p_c - порог протекания, $m = \nu d$ (ν - критический индекс корреляционной длины, d - мерность задачи). Сформулирована гипотеза о двойной универсальности индекса m , который не зависит от: 1) геометрии решетки и 2) θ -механизма генерации локального шума. Численное моделирование в трехмерной решетке дает для $\theta = 1$ и $\theta = 0$ $m = 2.3$, что согласуется с гипотезой.

PACS: 72.70.+m

К вычислению эффективных свойств систем с экспоненциально широким спектром распределения сопротивлений (ЭСР) сводится большое число проблем. Например, при исследовании высокотемпературной прыжковой проводимости в слабелегированных полупроводниках необходимо определить эффективную электропроводность σ_e случайной сетки с экспоненциально широким спектром распределения сопротивлений - так называемой сетки Миллера-Абрахамса [1]. Сопротивление i -ой связи этой сетки можно выбрать в виде

$$\tau_i = \tau_0 \exp(-\lambda x), \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \gg 1, \quad (1)$$

где x - случайная переменная с гладким распределением $D(x)$, одинаковым для всех связей.

Как показано в [1-4], существует прием, сводящий задачу о σ_e сетки Миллера-Абрахамса к перколяционной. Без учета предэкспоненциального множителя этот прием приводит к $\sigma_e = \sigma_0 \exp(\lambda x_c)$, где x_c определяется через значение порога перколяции стандартной двухфазной задачи на той же сетке

$$\int_0^1 D(x) dx = p_c, \quad \int_x^1 D(x) dx = p,$$

где p - условно введенная концентрация хорошо проводящей фазы. Более подробные исследования зависимости σ_e от λ [1,5-12] позволили найти

¹⁾e-mail: snar@carrier.kiev.ua

²⁾A.Kolek

перколяционно-подобный индекс y , определяющий поведение предэкспоненциального множителя:

$$\sigma_e = \sigma_0 \lambda^{-y} \exp(\lambda x_c) . \quad (2)$$

Согласно этим исследованиям, индекс y выражается через хорошо известный в теории перколяции критический индекс корреляционной длины $-\nu$, $y = \nu(d-2)$, где d – размерность задачи.

В [13,14] было показано, что для непротиворечивого описания перколяционно-подобного поведения эффективных величин, в частности σ_e в системах с ЭСР, необходимо считать, что система находится в так называемой области размазки [15] (аналоге области размытия фазового перехода в теории фазовых переходов второго рода). При этом при вычислении эффективных величин необходимо использовать какую-либо модель перколяционной структуры в области размазки. Такая модель, представляющая собой обобщение моделей типа Nodes-Lins-Blobs [5,6,11-16] на область размазки, была предложена в [17], см. рис.1. В работе [18] эта модель была использована в системах с ЭСР. Согласно этой модели, перколяционная структура системы с ЭСР состоит из мостика с сопротивлением $R_1 \sim \langle r \rangle_1 N_1$, прослойки с сопротивлением $R_2 \sim 1/(\langle 1/r \rangle_2 N_2)$ и сопротивления r_m . Здесь $\langle r \rangle_1$ – среднее значение сопротивлений в мостике, среднее берется по интервалу случайной переменной $x \in (x_1, 1)$, $\langle 1/r \rangle_2$ – в прослойке (где они соединены, в отличие от мостика, параллельно) по интервалу $x \in (0, x_2)$. Значения x_i связаны с величиной области размазки $\Delta - x_1 = x_c + (1 - x_c)\Delta$, $x_2 = x_c - (1 - x_c)\Delta$ [14]. В области размазки количество сопротивлений в мостике и прослойке также зависит от Δ : $N_i \sim \Delta^{-\alpha_i}$, где α_i – критические индексы, которые в разных моделях имеют разные численные значения. В двухфазных перколяционных системах хорошее согласие с экспериментальными и полученными численным моделированием данными дает выбор $\alpha_1 = t - \nu(d-2)$, $\alpha_2 = q + \nu(d-2)$ [19], где t и q – критические индексы проводимости выше и ниже порога протекания. В [18] было показано, что для систем с ЭСР выбор $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, как это было сделано для двухфазных систем в [5,16,20-23], дает лучшее согласие. Поэтому в дальнейшем всюду будут приняты эти значения α_i и только в таблице будут приведены оба значения α_i . Сопротивление $r_m = r_m(x)$ принимает равновероятно любое значение из интервала $x \in (x_2, x_1)$, соответствующего области размазки в двухфазной системе.

Не менее важной, чем σ_e , характеристикой неоднородных сред служит относительная спектральная плотность избыточного $(1/f)$ шума – C_e , исследованию которой в двухфазных средах вблизи порога перколяции посвящено большое число работ [6] (см. также ссылки в [14]). Задача об определении C_e в макроскопически неоднородных средах формулируется аналогично задаче о σ_e – по заданным локальным значениям $C(r)$ определить C_e , выражающееся через второй момент распределения джоулевого тепла [24]:

$$C_e = \frac{\langle C(r)(E(r)j(r))^2 \rangle}{(\langle E(r) \rangle \langle j(r) \rangle)^2} = \frac{\langle C(r)\sigma^2(E(r)/\langle E \rangle)^4 \rangle}{\sigma_e^2} . \quad (3)$$

Отметим, что так как в (3) входит локальное электрическое поле, нормированное на среднее значение по образцу, то само C_e не зависит от величины приложенного поля. Для дальнейшего необходимо сформулировать предположение, аналогичное гипотезе Хоуге [25], согласно которой $C = \kappa/\sigma^\theta$, где $\kappa \approx \text{const}$

– универсальная постоянная Хоуге и считается, что $\sigma \sim n$ – концентрации свободных носителей и $\theta = 1$.

В [14] для случая $\theta = 1$ было найдено выражение для C_e и вычислен новый – “шумовой” – перколяционно-подобный индекс в системе с ЭСР:

$$C_e \sim \sigma_e^{-1} \lambda^{2\nu} = \sigma_0^{-1} \exp(-\lambda x_c) \lambda^{m_1}, \quad m_1 = y + 2\nu = \nu d, \quad \theta = 1. \quad (4)$$

Расчет проводился по схеме рис.1, согласно которой можно определить локальные значения токов $j(r)$ и напряжений $E(r)$ в главных элементах перколяционной структуры – мостике, прослойке и сопротивлении r_m . Согласно перколяционному подходу к описанию кинетических явлений в средах вблизи порога протекания, наибольшая плотность тока имеет место в мостике, а основное падение напряжения происходит на прослойке, поэтому при расчете σ_e остальные элементы структуры в расчет не берутся. В отличие от σ_e , в C_e входит не первый, а второй момент джоулевого тепла (3), что позволяет еще с большим основанием при расчете C_e учесть только указанные на рис.1 элементы структуры.

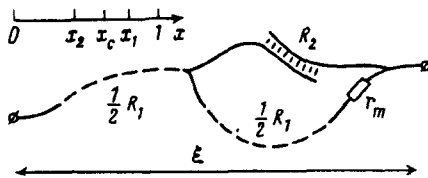


Рис.1. Модель перколяционной структуры в области размазки. R_1 – сопротивление “единично соединенных связей” хорошо проводящей фазы, R_2 – “единично разъединенных” – запараллеленных связей плохо проводящей фазы. Сопротивление r_m принимает с равной вероятностью значения из области размазки [17]

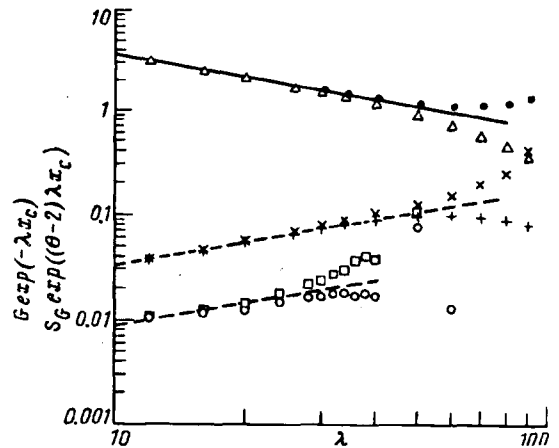


Рис.2. Результаты численного моделирования. В двойных логарифмических координатах показана зависимость координатанса G (сплошная линия) и шума S_G (штриховые линии). Перколяционно-подобные индексы определяются методом наименьших квадратов, применявшимся отдельно для арифметических (индекс a) и гармонических (индекс h) средних по реализациям случайного разброса сопротивлений: \square – $G_a \exp(-\lambda x_c)$, Δ – $G_h \exp(-\lambda x_c)$, $*$ – $S_{G_a} \exp(\theta-2) \lambda x_c|_{\theta=1}$, $+$ – $S_{G_h} \exp(\theta-2) \lambda x_c|_{\theta=1}$, \square – $S_{G_a} \exp(\theta-2) \lambda x_c|_{\theta=0}$, \circ – $S_{G_h} \exp(\theta-2) \lambda x_c|_{\theta=0}$

В недавних работах [26, 27] было показано, что в ряде случаев локальные значения C в туннельных переходах могут не зависеть от σ , то есть $C \approx \kappa / \sigma^\theta$ с $\theta = 0$. На основании модели перколяционной структуры в области размазки нами были найдены аналитические выражения C_e для произвольного $0 < \theta < 2$ и осуществлено численное моделирование для двух случаев $\theta = 1$ и $\theta = 0$. Выражение для C_e и шумового перколяционно-подобного индекса m_θ согласно

нашим расчетам имеет вид

$$C_e \sim (\sigma_0 \exp(\lambda x_c))^{-\theta} \lambda^{m_\theta}, \quad m_\theta = \nu d, \quad (5)$$

и m_θ не зависит от θ .

Для проверки полученных значений m_θ была смоделирована сетка с ЭСР. При численном моделировании удобнее использовать относительную спектральную плотность избыточного $(1/f)$ шума объема $V - S_G$, связанную с C_e соотношением $G^2 C_e = V S_G$, где G - кондактанс объема V . Согласно (4), $S_G = \sum S_{g_i} (U_i/U)^4$, где U_i - падение напряжения на i -й связи, а U - полное падение напряжения, S_{g_i} - шум i -й связи ($S_{g_i} = \{\delta g_i, \delta g_i\}$, $\{\dots\}$ - временной коррелятор). Аналогично тому, как это было отмечено при определении C_e (3), четвертая степень U_i не означает, что интенсивность $(1/f)$ шума пропорциональна четвертой степени приложенного к образцу напряжения - в S_G входит только относительное значение падения напряжения.

На каждом шаге вычислений строилась простая кубическая решетка с размером $L = a_0 N$ (a_0 - длина связи) и рассматривалась одна из возможных реализаций распределения сопротивлений. Решение системы уравнений Кирхгофа давало напряжение на всех связях решетки. Это позволило определить зависимость кондактанса - G и шум S_G всей системы.

Полученные данные приведены на рис.2 - наклон определяет значение перколяционно-подобных индексов - y и $m - 2y$. Как видно, различие между усреднениями (арифметическими G_a и S_{G_a} и гармоническими G_h и S_{G_h}) начинается с $\lambda \sim 30$. Это означает, что при $\lambda > 30$ система обладает фрактальной структурой. Действительно, при выбранном значении $N = 15$ (размер памяти для $N > 15$ больше 6 мегабайт, что существенно для программирования под Windows) корреляционный размер системы $\xi \sim a_0 \Delta^{-\nu} \sim a_0 \lambda^\nu$ [14] при $\lambda \approx 40$ уже в два раза превышает репрезентативный размер системы $\xi/a_0 \approx 30$. Результаты численного моделирования, приведенные в таблице, показывают хорошее согласие с аналитическим выражением $m_\theta = \nu d$.

Сравнение результатов аналитического расчета перколяционно-подобных индексов y и m с данными численного моделирования³⁾

	y	m_1	$m_1 - 2y$	m_0	$m_0 - 2y$
$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$	0.89	2.67	0.89	2.67	0.89
$\alpha_1 = t - \nu$	0.56	2.30	1.18	2.03	0.84
$\alpha_2 = q + \nu$					
Численное моделирование	$0.6 \pm 0.1^*$	2.30	$0.78^{+0.09}_{-0.08}$	2.26	$0.74^{+0.3}_{-0.22}$

Интересно отметить, что хотя $C_e(\theta = 1)$ экспоненциально сильно отличается от $C_e(\theta = 0)$, например, при $\lambda \approx 30$ и $x_c = 0.75$:

$$C_e(\theta = 0)/C_e(\theta = 1) = e^{\lambda x_c} \sim 10^9, \quad (6)$$

индекс m_θ остается тем же.

³⁾В двух верхних строчках приведены значения индексов, полученные на основе модели перколяционной структуры в области размазки. Численные значения критических индексов: $t = 1.94$, $q = 0.75$, $\nu = 0.89$. Значение y , помеченное звездочкой, получено в [9].

Таким образом, можно говорить о "двойной универсальности" перколяционно-подобного индекса m . Во-первых, m , как и критические индексы t , q и ν , не должен зависеть от типа решетки (но не от ее мерности); во-вторых, как позволяют предположить приведенные выше расчеты для $0 < \theta < 2$ и численное моделирование, индекс m не зависит от выбора "гипотезы Хоуге".

Работа частично выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 95-02-04432а. Один из авторов (А.С.) признателен Жешовскому Технологическому университету (Польша) за гостеприимство.

1. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*, М.: Наука, 1979.
2. V.Ambegaokar, B.I.Halperin, and J.S.Langer, *Phys. Rev. B* **4**, 2612 (1971).
3. M.Pollak, *J. Non-Cryst. Solids* **11**, 1 (1972).
4. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос, *ЖЭТФ* **60**, 867 (1971).
5. А.С.Скал, Б.И.Шкловский, *ФТП* **8**, 1586 (1984).
6. D.Stauffer and A.Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, 2nd, Ed. Taylor & Francis, London, Washington (1992).
7. J.Kurkijarvi, *Phys. Rev. B* **9**, 770 (1974).
8. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос, *Письма в ЖТФ* **1**, 174 (1975).
9. S.Тус and B.I.Halperin, *Phys. Rev. B* **39**, 877 (1989).
10. E.Charlaix, E.Guyon, and S.Roux, In *Transport in Porous Media 2*, Riedel, Dordrecht (1987), p.31.
11. P. Le Doussal, *Phys. Rev. B* **39**, 881 (1989).
12. B.I.Halperin, *Physica D* **38**, 179 (1989).
13. А.Е.Морозовский, А.А.Снарский, *Письма в ЖЭТФ* **56**, 272 (1992).
14. А.Е.Морозовский, А.А.Снарский, *ЖЭТФ* **104**, 4059 (1993).
15. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос, *Phys. Stat. Sol. b* **76**, 475 (1976).
16. P.G.DeGennes, *J. Physique* **37**, L21 (1976).
17. А.Е.Морозовский and А.А.Снарский, *Int. J. Electr.* **78**, 135 (1995).
18. А.Колек, А.А.Снарский, *ЖЭТФ* **108**, 894 (1995).
19. А.А.Снарский, *ЖЭТФ* **91**, 1405 (1986). А.Е.Морозовский, А.А.Снарский, *ЖЭТФ* **95**, 1844 (1989); *Письма в ЖЭТФ* **52**, 871 (1990); *Письма в ЖЭТФ* **102**, 683 (1992).
20. A.Coniglio, In *Disordered Systems and Localization*, v.149, *Lec. Not. Phys.* Springer, Berlin (1981).
21. A.Coniglio, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 250 (1986).
22. В.Е.Дубров, М.Е.Левинштейн, М.С.Шур, *ЖЭТФ* **70**, 2014 (1976).
23. D.C.Wright, D.J.Bergman, and Y.Kantor, *Phys. Rev. B* **33**, 396 (1986).
24. H.Butterweck, *Philips Res. Rep.* **30**, 316 (1975).
25. Ш.М.Коган, *УФН* **145**, 285 (1985).
26. Ш.М.Коган, К.Э.Нараев, *Письма в ЖТФ* **10**, 5 (1984).
27. A.M.Speakman and C.J.Adkins, *J. Phys. C* **4**, 8035 (1992).