Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.8, стр.640 - 645 © 1996г. 25 апреля

О ЗНАКЕ ГАРМОНИК ЭФФЕКТИВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ФЕРМИ-ГАЗЕ С ОТТАЛКИВАНИЕМ

*М.А.Баранов, М.Ю.Каган**

Институт общей физики РАН
117942 Москва, Россия

** Институт физических проблем им.П.Л.Капицы РАН*
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 марта 1996 г.

Приведено общее модельно-независимое обоснование утверждения о возможности сверхпроводящего перехода в ферми-газе с отталкиванием. Для широкого класса систем продемонстрирован притягательный характер по крайней мере одной из гармоник эффективного взаимодействия. Найдено соотношение между гармониками эффективного взаимодействия и гармониками амплитуды рассеяния квазичастиц в газовом приближении.

PACS: 74.20.-z, 71.27.+a

1. В пионерской работе [1] и последовавших за ней работах [2,3] было продемонстрировано, что вопреки традиционным представлениям ферми-система с чисто отталкивательным взаимодействием неустойчива относительно сверхпроводящего спаривания в триплетном канале с $l = 1$. Важность и нетривиальность данного результата, а также развернувшаяся вокруг этого утверждения дискуссия [4,5] требуют его осмысления на уровне общих модельно-независимых соображений. В этом контексте интересно вывести соотношение типа правила сумм для гармоник эффективного взаимодействия в куперовском канале, доказывающее притягательный характер хотя бы одной из них, а также установить взаимосвязь между этими гармониками и традиционными для теории ферми-жидкости гармониками амплитуды рассеяния квазичастиц. Это важно как для дополнительного обоснования утверждения о сверхпроводящей неустойчивости в газе с отталкиванием, так и для усилий авторов продвинуться на большие плотности, то есть распространить ферми-газовый подход на реально сильно коррелированные системы.

2. Утверждение о возможности сверхпроводящего перехода в ферми-газе с отталкиванием базируется на аккуратном анализе эффективного взаимодействия в первых двух порядках теории возмущений. Говоря более конкретно, в работах [2,3] установлено, что эффективное взаимодействие на ферми-поверхности имеет вид

$$V_{eff}(\theta) = V_{eff}(p,-p;p',-p') = \lambda + \lambda^2 \Pi(\pi-\theta), \tag{1}$$

где $\lambda = 2ap_F/\pi$ – газовый параметр, a – длина s-рассеяния, p_F – ферми-импульс, $\theta = \widehat{\mathbf{pp}'}$ – угол между входящим и выходящим из куперовского канала импульсами,

$$\Pi(\pi-\theta) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin^2(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} \ln\frac{1+\cos(\theta/2)}{1-\cos(\theta/2)}\right] \tag{2}$$

– вклад в эффективное взаимодействие от обменной диаграммы, совпадающей для короткодействующего потенциала с поляризационным оператором. Аргумент $\pi-\theta$ в поляризационном операторе есть следствие кроссинга, то есть зависимости V_{eff} не от $\mathbf{p}-\mathbf{p}'$, а от $\mathbf{p}+\mathbf{p}'$. Редуцирование интегрального уравнения Бете–Солпетера в куперовском канале к алгебраическому производится при помощи полиномов Лежандра и приводит к следующему результату:

$$
\begin{aligned}
V_{eff}^{(0)} &= \lambda + \lambda^2 \frac{2\ln 2 + 1}{3} > 0 \ , \\
V_{eff}^{(1)} &= -\lambda^2 \frac{2\ln 2 - 1}{5} < 0 \ , \\
V_{eff}^{(2)} &= -\lambda^2 \frac{2}{105}(8 - 11\ln 2) \approx 0.1 V_{eff}^{(1)} < 0 \ , \\
V_{eff}^{(3)} &\approx 0.025 V_{eff}^{(1)} < 0, \quad V_{eff}^{(4)} \approx 0.01 V_{eff}^{(1)} < 0 \quad \text{и т.д.}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Критерий Ландау для определения температуры сверхпроводящего перехода записывается при этом в виде

$$1 + V_{eff}^{(l)} \ln \frac{\varepsilon_F}{T_{cl}} = 0 \ .$$

Из формул (2),(3) немедленно следует, что гармоники эффективного взаимодействия притягательны для всех ненулевых значений орбитального момента l куперовской пары, их абсолютная величина быстро падает с ростом l, начиная уже с $l = 2$, а максимальное значение T_c соответствует триплетному p-спариванию. Также обратим внимание, что из формулы (1) для $V_{eff}(\theta)$ вытекает следующее соотношение типа правила сумм:

$$V_{eff}(\theta = \pi) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) V_{eff}^{(l)} = \lambda + \lambda^2 \Pi(0) = \lambda + \lambda^2, \tag{4}$$

причем $\Pi(0) \equiv 1$ не зависит от деталей модели, а также определяется своим правилом сумм (статический поляризационный оператор $\Pi(q)$ при $q = 0$ всегда нормирован на плотность энергетических состояний $N(0)$, то есть в данных обозначениях на единицу).

Можно проверить, что уже первые три гармоники эффективного взаимодействия (s, p и d) удовлетворяют соотношению (4) с точностью до $0.02\lambda^2$. Также обратим внимание на то, что $V_{eff}^{(0)} < V_{eff}(\theta = \pi)$, поскольку $\Pi(\pi - \theta)$ положительна и монотонно возрастающая функция θ на интервале $[0, \pi]$. В силу этого, из правила сумм (4) следует (с учетом малости всех гармоник с $l \geq 2$), что p-гармоника эффективного взаимодействия должна быть притягательной. Отметим, что согласно идее Нозьера [8] отрицательный знак $V_{eff}^{(1)}$ может быть обоснован и без привлечения информации о других гармониках из тех же соображений о монотонном возрастании $\Pi(\pi - \theta)$ на интервале $[0, \pi]$ и необходимости его интегрирования со знакопеременной функцией $\cos\theta$. (Область $[0, \pi/2]$ меньших значений функции $\Pi(\pi - \theta)$ надо интегрировать с положительной частью $\cos\theta$, а область больших значений с отрицательной. В результате получим отрицательное значение $V_{eff}^{(1)}$.) Таким образом, для всех монотонно возрастающих на интервале $[0, \pi]$ (или, что то же самое, на интервале $q = [0, 2p_F]$) потенциалов $V_{eff}(q)$ гармоника p-рассеяния является притягательной. Отметим, что это ситуация очень общего положения. Возможно, однако, и более мягкое требование на эффективное взаимодействие, при котором хотя бы одна из парциальных гармоник становится притягательной. Для установления этого наиболее общего требования рассмотрим соотношение

$$V_{eff}(\theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) V_{eff}^{(l)} = \lambda + \lambda^2 \Pi(\pi) = \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 \ . \tag{5}$$

Отметим, что это соотношение неуниверсально в силу модельной зависимости $\Pi(\pi)$. Однако в случае, когда $V_{eff}(\theta)$ является монотонно возрастающей функцией θ на интервале $[0,\pi]$(или, что то же самое, когда $V_{eff}(\cos\theta)$ монотонно убывает), оно позволяет сделать вполне определенное заключение о наличии отрицательных гармоник $V_{eff}^{(l)}$. Именно, в случае монотонного убывания $V_{eff}(\cos\theta)$ как функции $\cos\theta$ справедливо следующее соотношение:

$$V_{eff}^{(0)} \equiv \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) V_{eff}(\cos\theta) > V_{eff}(\cos\theta = 1).$$

В силу этого в соотношении

$$V_{eff}(\cos\theta = 1) \equiv V_{eff}(\theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)V_{eff}^{(l)}$$

первый член ряда в правой части оказывается больше, чем сумма всего ряда. Отсюда следует, что по крайней мере для одного $l > 0$ $V_{eff}^{(l)}$ должно быть отрицательным. Таким образом для отрицательности хотя бы одной из гармоник $V_{eff}(\theta)$ достаточно выполнения существенно более мягкого (чем монотонное возрастание $V_{eff}(\theta)$ на интервале $[0,\pi]$) условия

$$V_{eff}(\theta = 0) < V_{eff}^{(0)} \tag{6}$$

– среднее от потенциала больше, чем потенциал в начальной точке.

Таким образом, выведенные в данном разделе общие соотношения (4), (6) служат дополнительным модельно-независимым обоснованием результата работ [2,3] о сверхпроводящем спаривании в газе с отталкиванием.

3. Отметим, что утверждение о притягательном характере $V_{eff}^{(1)}$ было поставлено под сомнение в недавней работе [5]. На наш взгляд, основным источником заблуждения автора [5], приведшим его к ошибочным выводам, явилось некорректное использование метода ренорм-группы. Именно, неверным оказывается утверждение о доминирующей роли больших импульсов в поляризационном операторе. Как следствие этого, оказывается неверной и вся конструкция ренорм-группы. (Корректное применение ренорм-группового подхода см. в обзоре [6].) Говоря более конкретно, в работе [5] при вычислениях, связанных с поляризационным оператором, была допущена ошибка, связанная с неправильным определением разрешенных областей интегрирования. Дело в том, что после интегрирования по промежуточной частоте область допустимых значений модуля промежуточного импульса ограничена интервалом от $k = p_F - q/2$ до $k = p_F + q/2$, где $q = |\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1| \le 2p_F$, а $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_3| = p_F$ есть входящий и выходящий импульсы в куперовском канале. Более конкретно,

$$\Pi(\mathbf{q}) = \int \frac{n(\mathbf{p}+\mathbf{q}) - n(\mathbf{p})}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int \frac{n(\mathbf{p}+\mathbf{q}/2) - n(\mathbf{p}-\mathbf{q}/2)}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} =$$
$$= -\frac{m}{4\pi^2} \int_{p_F - q/2}^{p_F + q/2} \frac{p\,dp}{q} \ln \frac{|p_F^2 - p^2 - q^2/4|}{pq}. \tag{7}$$

Отсюда видно, что в поляризационный оператор промежуточные импульсы k, больше $2k_F$, вклада вообще не вносят. Соответствующий вклад от (7) в $V_{eff}^{(1)}$ дается выражением

$$V_{eff}^{(1)} = \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\cos\theta\,\Pi(q) = \int_0^{2p_F} \frac{q\,dq}{p_F^2}\left(\frac{q^2}{2p_F^2} - 1\right)\Pi(q), \tag{8}$$

где мы произвели замену переменных согласно формуле $q^2 = 2p_F^2(1+\cos\theta)$. В духе работы [5] формулу (8) можно переписать в виде

$$V_{eff}^{(1)} = -\frac{m}{4\pi^2 p_F^2}\int_0^{2p_F} dp \cdot p \int_{2|p-p_F|}^{2p_F} \left(\frac{q^2}{2p_F^2} - 1\right) \ln \frac{|p_F^2 - p^2 - q^2/4|}{pq} dq \ , \tag{9}$$

так что выражение

$$\Phi_1(p) = -p \int_{2|p-p_F|}^{2p_F} \left(\frac{q^2}{2p_F^2} - 1\right) \ln \frac{|p_F^2 - p^2 - q^2/4|}{pq} dq \tag{10}$$

дает вклад в $V_{eff}^{(1)}$ от бесконечно малой оболочки от p до $p + dp$. Иными словами, можно сказать, что $\Phi_1(p) = dV_{eff}^{(1)}/dp$ определяет поведение $V_{eff}^{(1)}$ при переходе от меньших промежуточных импульсов к большим. (Подчеркнем, что выражение для $\Phi_0(p)$, определяющее поведение $V_{eff}^{(0)}$, дается формулой, аналогичной (10), но без множителя $(q^2/2p_F^2 - 1)$.)Вычисление интеграла (10) тривиально, хотя и громоздко. Поэтому мы не будем приводить получающееся для $\Phi_1(p)$ аналитическое выражение, а ограничимся лишь графиком (см. рис.1), на котором для полноты картины мы построили также $\Phi_0(p)$. Из этого графика видно, что, во-первых, в противоречие с выводами работы [5] $\Phi_1(p)$ является знакопеременной функцией, и, во-вторых, что область отрицательных значений $\Phi_1(p)$ вблизи p_F является доминирующей при вычислении $V_{eff}^{(1)}$, приводя к притяжению в p-канале. Непосредственное интегрирование показывает, что $V_{eff}^{(1)} = -(2\ln 2 - 1)/5$ – в тождественном согласии с результатами работ [2,3]. Следует, однако, подчеркнуть, что конкретный вид функции $\Phi_1(p)$ оказывается чувствительным к выбору переменных интегрирования в поляризационном операторе (7). Если, по аналогии с [5], вычислять $\Pi(q)$ в несимметричных пределах (выражение после первого знака равенства в (7)), то оказывается, что

$$\tilde{\Phi}_1(p) = p \int_{p-p_F}^{2p_F} \left(\frac{q^2}{2p_F^2} - 1\right) \ln \frac{2pq - q^2}{p^2 - p_F^2} dq \ ,$$

где p меняется от p_F до $3p_F$. График функции $\tilde{\Phi}_1(p)$ приведен на рис.2. Он, хотя и отличается от графика для функции $\Phi_1(p)$, но сохраняет все ее основные особенности и, разумеется, дает такой же результат для $V_{eff}^{(1)}$.

Все вышесказанное позволяет нам поставить под сомнение основные выводы работы [5], а содержание данного раздела рассматривать как перевывод результатов работ [2,3] в ренорм-групповом духе.

4. В заключение статьи установим связь между гармониками эффективного взаимодействия и традиционными для ферми-жидкости гармониками амплитуды рассеяния квазичастиц в первых двух порядках теории возмущений. Амплитуда рассеяния квазичастиц в ферми-газе с отталкиванием была вычислена в известной работе Абрикосова и Халатникова [9] вскоре после построения Ландау феноменологической теории ферми-жидкости. Напомним, что амплитуда рассеяния квазичастиц связана с физическим пределом $\omega/k \to 0$ вершинной функции $\Gamma(p_1, p_2, k)$ в канале с малой передачей импульса. В первых двух порядках теории возмущений она имеет вид

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\theta) &= \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4) = A_s(\theta)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + A_a(\theta)\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta}; \\ A_s(\theta) &= \lambda + 2\lambda^2\Pi(\theta) + \lambda^2 C(\pi-\theta) - \lambda^2\Pi(0), \end{aligned} \tag{11}$$

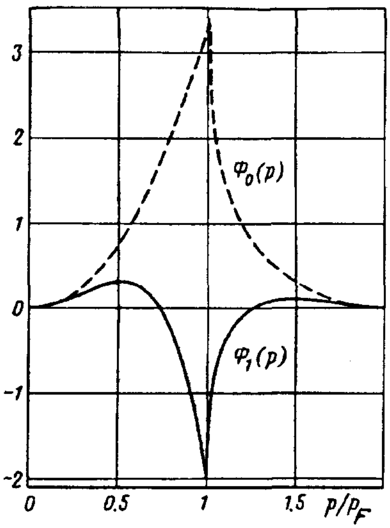

Рис.1. График зависимости $\Phi_0(p)$ и $\Phi_1(p)$ для симметричных пределов поляризованного оператора

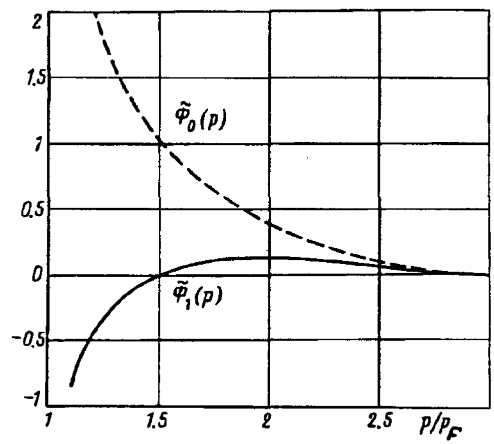

Рис.2. График зависимости $\tilde{\Phi}_0(p)$ и $\tilde{\Phi}(p)$ для несимметричных пределов поляризационного оператора

$$A_a(\theta) = -\left[\lambda + \lambda^2 C(\pi - \theta) + \lambda^2 \Pi(0)\right],$$

где $\sigma_{\alpha\gamma}$ – матрицы Паули,

$$C(\pi-\theta) = C(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2) = \left[1 - \frac{\sin(\theta/2)}{2}\ln\frac{1+\sin(\theta/2)}{1-\sin(\theta/2)}\right] \tag{12}$$

– регуляризованная на больших импульсах куперовская петля. Интегрирование (11) с полиномами Лежандра определяет гармоники амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} A_{0s} &= \lambda + \lambda^2\frac{2\ln 2+1}{3} > 0, & A_{0a} &= -\lambda - \lambda^2\frac{5-2\ln 2}{3} < 0,\\ A_{1s} &= \lambda^2\frac{2}{15}(7\ln 2 - 1) > 0, & A_{1a} &= -\lambda^2\frac{2}{15}(\ln 2 + 2) < 0,\\ A_{2s} &= -\lambda^2\frac{43-43\ln 2}{105} < 0, & A_{2a} &= \lambda^2\frac{11-2\ln 2}{105} > 0 \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \tag{13}$$

Гармоники Ландау имеют при этом вид (см. [10], §18):

$$\begin{aligned} F_0^s &= A_0^s + \lambda^2, & F_0^a &= A_0^a + \lambda^2,\\ F_l^s &= A_l^s, & F_l^a &= A_l^a \text{ для } l \neq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Прямой подстановкой (13) в (14) можно убедиться в правильности вычислений $F_l^{s;a}$ (сравни [9,10,11]). Вернемся вновь к амплитуде рассеяния и рассмотрим ее в триплетном канале

$$A^t(\theta) = A^s(\theta) + A^a(\theta) = 2\lambda^2\left[\Pi(\theta) - \Pi(0)\right]. \tag{15}$$

Из (15) мгновенно следует установленное Мерминым для ферми-жидкости произвольной плотности правило сумм при рассеянии вперед:

$$A^t(0) = A^s(0) + A^a(0) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(A_l^s + A_l^a) = 0. \tag{16}$$

Соотношение (16) отражает факт отсутствия взаимодействия в полностью поляризованной ферми-системе с короткодействующим потенциалом между частицами. Для наших целей, однако, более существенным является тот факт, что сравнение (15) с (1) немедленно дает связь между амплитудой рассеяния и эффективным взаимодействием в первых двух порядках по λ:

$$A^t(\theta) = 2\left[V_{eff}(\pi - \theta) - V_{eff}(\pi)\right]. \tag{17}$$

В результате из соотношений (1), (15) и (17) вытекает искомое соотношение между гармониками эффективного взаимодействия и гармониками амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned} V_{eff}^{(0)} &= \lambda + \lambda^2 + \frac{A_0^s + A_0^a}{2}, \\ V_{eff}^{(l)} &= (-1)^l \frac{A_l^s + A_l^a}{2} \quad l \neq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

В частности, из (18) вытекает следующая важная формула:

$$V_{eff}^{(1)} = -\frac{1}{\ln \epsilon_F / T_{c1}} = -\frac{1}{2}(A_1^s + A_1^a). \tag{19}$$

Формула (19) может быть применена для предсказания T_c в концентрированном растворе ^3He в ^4He. Гармоника $A_1^s = F_1^s$ должна определяться при этом из измерений эффективной массы, а гармоника $A_1^a = F_1^a$ – из измерений спиновой диффузии (механизм Леггета–Райса [13]).

В заключение статьи укажем еще раз, что мы построили модельно-независимое обоснование того факта, что по крайней мере одна из гармоник эффективного взаимодействия отрицательна. Из этого однозначно следует возникновение сверхпроводящей неустойчивости в ферми-газе с отталкиванием. В статье также в ренорм-групповом духе осуществлен перевывод основных результатов работ [2,3]. Наконец, нам удалось связать классические результаты Абрикосова–Халатникова для нормального ферми-газа и более новые результаты авторов, важные для теории сверхпроводимости.

Авторам приятно выразить благодарность Е.П.Башкину, Д.Райнеру, И.А.Фомину, Ю.А.Бычкову и в особенности Ф.Нозьеру за плодотворные дискуссии.

---

1. W.Kohn and J.H.Luttinger, Phys. Rev. Lett. **15**, 524 (1965).
2. D.Fay and A.Lazer, Phys. Rev. Lett. **20**, 187 (1968).
3. М.Ю.Каган, А.В.Чубуков, Письма в ЖЭТФ **47**, 525 (1988); M.A.Baranov, A.V.Chubukov, and M.Yu.Kagan, Int. J. of Mod. Phys. **B6**, 2471 (1992).
4. A.S.Alexandrov and A.A.Golubov, Phys. Rev. **B45**, 4769 (1992).
5. H.Capellmann, Письма в ЖЭТФ **62**, 726 (1995).
6. R.Shankar, Rev. Mod. Phys. **66**, 129 (1994).
7. В.М.Галицкий, ЖЭТФ **34**, 151 (1958).
8. Ф.Нозьер, частное сообщение.
9. A.A.Abrikosov and I.M.Khalatnikov I.M., Rep. Prog. Phys. **22**, 329 (1959).
10. *Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, Статистическая физика*, часть 2, М.: Наука, 1978.
11. E.P.Bashkin and A.E.Meyerovich, Adv. Phys. **30**, 1 (1981).
12. N.D.Mermin, Phys. Rev. **159**, 161 (1967).
13. A.J.Legget and M.J.Rice, Phys. Rev. Lett. **20**, 586 (1968).