

СТРУННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $SU(3)$ ГЛЮОДИНАМИКИ В АБЕЛЕВОЙ ПРОЕКЦИИ

Д.А.Комаров⁺⁺, М.Н.Чернодуб^{*}

⁺Московский физико-технический институт
141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики
117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 июня 1998 г.

После переработки 18 июня 1998 г.

Рассмотрена дуальная модель Гинзбурга – Ландау, соответствующая $SU(3)$ глюодинамике в абелевой проекции. В рамках этой модели получена струнная теория, описывающая динамику струн квантовой хромодинамики. В лидирующем приближении исследуется взаимодействие статических кварков в мезонах и барионах.

PACS: 12.38.Lg, 12.40.Nn

Один из подходов к проблеме невылетания цвета в квантовой $SU(N)$ -глюодинамике является метод абелевых проекций, предложенный 'т Хофтом [1]. Этот метод основан на частичной фиксации калибровки, которая не фиксирует абелеву калибровочную подгруппу $[U(1)]^{N-1}$. Диагональные элементы глюонного поля преобразуются при таких абелевых преобразованиях как калибровочные поля, а недиагональные элементы – как векторные поля материи. Поскольку $SU(N)$ -группа компактна, то ее абелева подгруппа также компактна, и в системе существуют абелевы монополи. Если монополи сконденсированы, то невылетание можно объяснить на классическом уровне [2, 3]: между цветными зарядами (кварками) образуется струна, являющаяся (дуальным) аналогом струны Абрикосова в сверхпроводнике, причем роль куперовских пар играют монополи.

Описанный механизм невылетания, который часто называют "механизмом дуального сверхпроводника", был подтвержден многочисленными компьютерными расчетами на решетке (см., например, обзоры [4]). Например, показано, что вклад абелевых монополей в натяжение струны практически полностью совпадает с полным натяжением струны, монопольные токи удовлетворяют уравнению Лондона для сверхпроводника, конденсат абелевых монополей отличен от нуля в фазе конфайнмента и строго равен нулю в фазе деконфайнмента. Хотя все эти результаты были получены для $SU(2)$ -глюодинамики, существуют основания считать, что модель дуального сверхпроводника должна работать также и в более реалистичном случае $SU(3)$ -глюодинамики [4]. Существенным отличием $SU(3)$ -теории от $SU(2)$ является наличие двух независимых струнных конфигураций – дуальных аналогов струны Абрикосова в сверхпроводнике. В настоящей работе мы изучаем струнные степени свободы и исследуем взаимодействие кварков в $SU(3)$ -глюодинамике в рамках модели дуального сверхпроводника (дуальной модели Гинзбурга – Ландау).

Дуальная модель Гинзбурга – Ландау [5], соответствующая $SU(3)$ -глюодинамике, в евклидовом пространстве описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{DGL} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu)^2 + \sum_{i=1}^3 \left[|(i\partial_\mu - g\epsilon_i \cdot \mathbf{B}_\mu)\chi_i|^2 + \lambda(|\chi_i|^2 - v^2)^2 \right]. \quad (1)$$

Этот лагранжиан содержит два абелевых калибровочных поля, $V_\mu = (B_\mu^3, B_\mu^8)$, которые дуальны полям глюонов A^3 и A^8 , принадлежащим подгруппе Картана калибровочной группы $SU(3)$. Модель (1) также содержит три поля Хиггса: $\chi_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2, 3$, фазы которых связаны соотношением

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0. \quad (2)$$

Поля Хиггса χ_i соответствуют полям монополей, которые сконденсированы, поскольку $\lambda > 0$ и $v^2 > 0$. Абелевы заряды полей Хиггса по отношению к калибровочным полям B_μ^3 и B_μ^8 определяются корневыми векторами группы $SU(3)$: $\epsilon_1 = (1, 0)$, $\epsilon_2 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$, $\epsilon_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$; мы также использовали обозначение $(\mathbf{a})^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^3 b^3 + a^8 b^8$. Лагранжиан (1) инвариантен относительно $[U(1)]^2$ калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} B_\mu^a &\rightarrow B_\mu^a + \partial_\mu \alpha^a, & a = 3, 8; \\ \theta_i &\rightarrow \theta_i + g(\epsilon_i, \alpha) \bmod 2\pi, & i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где $\alpha = (\alpha^3, \alpha^8)$ – параметры калибровочного преобразования.

В модели (1) существуют вихревые конфигурации, которые аналогичны струнам Абрикосова – Нильсена – Олесена (АНО) [6] в абелевой модели Хиггса (АМХ). В АМХ электрически заряженные поля Хиггса Φ сконденсированы и АНО струны несут квантованный магнитный поток. При обходе вокруг такой струны фаза $\theta = \arg \Phi$ поля Хиггса приобретает добавку $\theta \rightarrow \theta + 2\pi n$, где n – целое число (число элементарных потоков внутри струны). Таким образом, в центре струны фаза поля Хиггса сингулярна и, следовательно, поле Хиггса равно нулю: $\text{Im} \Phi = \text{Re} \Phi = 0$. Два последних уравнения определяют двумерное многообразие в четырехмерном пространстве, являющееся мировой поверхностью центра струны.

В модели (1) можно ввести три струнные степени свободы $\Sigma^{(i)}$, которые соответствуют трем полям Хиггса χ_i , $i = 1, 2, 3$. Поскольку в этой модели сконденсированные поля Хиггса имеют магнитный заряд, то струны $\Sigma^{(i)}$ несут электрический поток и, как мы увидим ниже, имеют ненулевое натяжение, что приводит к невылетанию цвета. По аналогии с абелевой модели Хиггса [7] струны $\Sigma^{(i)}$ определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \partial_{[\mu} \partial_{\nu]} \theta_i(x, \tilde{x}) &= 2\pi \tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^{(i)}(x, \tilde{x}^{(i)}), & \tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^{(i)} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}^{(i)}, \\ \Sigma_{\alpha\beta}^{(i)}(x, \tilde{x}^{(i)}) &= \int_{\Sigma^{(i)}} d^2 \sigma \epsilon^{ab} \frac{\partial \tilde{x}_\alpha^{(i)}}{\partial \sigma_a} \frac{\partial \tilde{x}_\beta^{(i)}}{\partial \sigma_b} \delta^{(4)}[x - \tilde{x}^{(i)}(\sigma)], \end{aligned} \quad (3)$$

где вектор $\tilde{x} = \tilde{x}^{(i)}(\sigma)$ описывает сингулярности фаз θ_i параметризованные σ_1 и σ_2 ; тензор $\Sigma_{\mu\nu}^{(i)}$ определяет положение сингулярностей. Заметим, что $\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} \theta_i \neq 0$, так как фазы θ_i являются сингулярными функциями.

Струнные мировые поверхности $\Sigma^{(i)}$ не являются независимыми, поскольку фазы полей Хиггса связаны соотношением (2):

$$\Sigma_{\mu\nu}^{(1)} + \Sigma_{\mu\nu}^{(2)} + \Sigma_{\mu\nu}^{(3)} = 0. \quad (4)$$

Согласно численным оценкам [8], параметр λ в лагранжиане дуальной модели Гинзбурга – Ландау (1) является довольно большим, $\lambda \sim 65 \gg 1$. Поэтому ниже мы рассматриваем струнные степени свободы в лондоновском пределе $\lambda \rightarrow \infty$, ко-

торый соответствует лидирующему приближению с точностью до поправок порядка $O(\lambda^{-1})$.

В лондоновском пределе радиальные степени свободы полей Хиггса заморожены на своих вакуумных значениях, $\chi_i = v$, следовательно, динамическими переменными являются фазы полей Хиггса θ_i и дуальные калибровочные поля $B^{3,8}$. Тогда континуальный интеграл модели примет вид

$$\mathcal{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}B \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{D}\theta_i \exp\left\{-\int d^4x \mathcal{L}_{\text{DGL}}(B, \theta)\right\}, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{DGL}}(B, \theta) = \frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu)^2 + v^2 \sum_{i=1}^3 (\partial_\mu \theta_i + g\epsilon_i \cdot \mathbf{B}_\mu)^2. \quad (6)$$

Интегрируя по полям \mathbf{B}_μ и $\theta^{(i)}$, аналогично работам [9, 7], получим

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Sigma_{\mu\nu} \delta\left(\sum_{i=1}^3 \Sigma_{\mu\nu}^{(i)}\right) \exp\left\{-S_{\text{str}}(\Sigma)\right\}, \quad (7)$$

$$S_{\text{str}}(\Sigma) = 2\pi^2 v^2 \int d^4x d^4y \sum_{i=1}^3 \Sigma_{\mu\nu}^{(i)}(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{(i)}(y), \quad (8)$$

где $m_B^2 = 3g^2 v^2$ – масса калибровочных полей B^3 и B^8 , \mathcal{D}_{m_B} суть пропагатор массивного поля: $(\Delta + m_B^2)\mathcal{D}_{m_B}(x) = \delta^{(4)}(x)$, и мы ввели обозначения для струнных переменных $\Sigma = (\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(3)})$. Мера интегрирования $\mathcal{D}\Sigma$ включает в себя якобиан [7], соответствующий переходу от полевых переменных (B_μ^a, θ_i) к струнным (Σ) .

Полезно переписать струнное действие (8) через независимые струнные переменные $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$, пользуясь соотношением (4):

$$S_{\text{str}}(\Sigma) = 4\pi^2 v^2 \int d^4x d^4y \left\{ \Sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{(1)}(y) + \Sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{(2)}(y) + \Sigma_{\mu\nu}^{(2)}(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{(2)}(y) \right\}. \quad (9)$$

В этой формулировке видно, что модель содержит два типа струн, которые отталкиваются, когда электрические потоки в них сонаправлены, и притягиваются, когда потоки направлены противоположно.

Интересной задачей является нахождение потенциала взаимодействия покоящихся (бесконечно тяжелых) кварков. Поскольку рассматриваемая модель Гинзбурга–Ландау является дуальной к $SU(3)$ -глюодинамике, то потенциал $V_c(R)$ взаимодействия кварков q_c и \bar{q}_c определяется средним от петли 'т Хофта:

$$V_c(R) = -\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln \langle H_c(\mathcal{C}_{R \times T}) \rangle, \quad (10)$$

$$\langle H_c(\mathcal{C}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}B \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{D}\theta_i \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu - \mathbf{Q}^{(c)} \Sigma_{\mu\nu}^c)^2 + v^2 \sum_{i=1}^3 (\partial_\mu \theta_i + g\epsilon_\alpha \cdot \mathbf{B}_\mu)^2 \right] \right\}, \quad (11)$$

где контур $C_{R \times T}$ является прямоугольной петлей размером $R \times T$, представляющей траектории кварка и антикварка. Поверхность $\Sigma_{\mu\nu}^C$ суть струна, имеющая своей границей траекторию C :

$$\partial_\mu \Sigma_{\mu\nu}^C(x) = j_\nu^C(x), \quad j_\mu^C(x) = \oint_C d\tau \frac{\partial \tilde{x}_\mu(\tau)}{\partial \tau} \delta^{(4)}(x - \tilde{x}(\tau)), \quad (12)$$

где вектор \tilde{x}_μ параметризует траекторию C . Кварк q_c (антикварк $q_{\bar{c}}$) несет цветные заряды $Q^{(c)}$, ($Q^{(\bar{c})} = -Q^{(c)}$, соответственно), которые принимают значения

$$Q^{(c)} = (Q_3^{(c)}, Q_8^{(c)}) = \left\{ \left(\frac{e}{2}, \frac{e}{2\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{e}{2}, \frac{e}{2\sqrt{3}} \right), \left(0, -\frac{e}{\sqrt{3}} \right) \right\} \quad (13)$$

для красного ($c = R$), синего ($c = B$) и зеленого ($c = G$) кварков, соответственно. Здесь $e = 4\pi/g$ суть элементарный абелевый электрический заряд.

Проинтегрировав в выражении (11) по полям \mathbf{B}_μ и θ_i , мы получим:

$$\begin{aligned} \langle H_c(C) \rangle = & \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Sigma_{\mu\nu}^C \delta \left(\sum_{i=1}^3 \Sigma_{\mu\nu}^{(i)} \right) \exp \left\{ -\pi^2 v^2 \int d^4x d^4y \times \right. \\ & \times \sum_{i=1}^3 \left(\Sigma_{\mu\nu}^{C,(i)}(x; s_i^{(c)}) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{C,(i)}(y; s_i^{(c)}) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{m_B^2} j_\mu^C(x; s_i^{(c)}) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) j_\mu^C(y; s_i^{(c)}) \right) \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

где для струнных поверхностей типа i , имеющих своей границей контур C , мы ввели обозначение

$$\Sigma_{\mu\nu}^{C,(i)}(x; s_i^{(c)}) = s_i^{(c)} \Sigma_{\mu\nu}^C(x) + \Sigma_{\mu\nu}^{(i)}(x), \quad j_\mu^C(x; s_i^{(c)}) = \partial_\nu \Sigma_{\mu\nu}^{C,(i)}(x; s_i^{(c)}). \quad (15)$$

Эти переменные удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^3 \Sigma_{\mu\nu}^{C,(i)}(x; s_i^{(c)}) = 0. \quad (16)$$

Величины $s_i^{(c)}$ имеют простой смысл: кварк цвета c является границей для $s_i^{(c)}$ струн типа i . Если $s_i^{(c)} < 0$, то соответствующая струна несет отрицательный поток. Величины s приведены в таблице:

c	R	B	G
$s_1^{(c)}$	1	-1	0
$s_2^{(c)}$	-1	0	1
$s_3^{(c)}$	0	1	-1

Согласно таблице, конечной массой могут обладать только бесцветные состояния: если кварки образуют цветную конфигурацию, то существует струна, уносящая поток цветного поля от этой конфигурации на бесконечность. Энергия такой струны бесконечна, поскольку струна обладает ненулевым натяжением.

Вследствие условия (16), кварки из $R - \bar{R}$, $B - \bar{B}$ и $G - \bar{G}$ пар связаны между собой либо двумя противоположно направленными струнами двух разных типов, либо только любой одной из этих струн, в зависимости от того, интегрированием по которой из струн снимается δ -функция в уравнении (14). Физические величины (например, потенциал взаимодействия кварков) от этого зависеть не будут, поскольку

натяжение двух "слипшихся" противоположно направленных струн разного типа будет совпадать с натяжением одной струны. Также потенциал взаимодействия кварков q_c и $q_{\bar{c}}$ не зависит от цвета c . Поэтому мы найдем потенциал между покоящейся парой $G - \bar{G}$, проинтегрировав в выражении (14) по струне $i = 3$:

$$\begin{aligned} \langle H_{c=G}(C) \rangle = & \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Sigma_{\mu\nu}^{(1)} \mathcal{D}\Sigma_{\mu\nu}^{c,(2)} \exp \left\{ -2\pi^2 v^2 \int d^4x d^4y \times \right. \\ & \times \left(\Sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{(1)}(y) + \Sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{c,(2)}(y) + \right. \\ & \left. \left. + \Sigma_{\mu\nu}^{c,(2)}(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) \Sigma_{\mu\nu}^{c,(2)}(y) + \frac{2}{m_B^2} j_\mu^c(x) \mathcal{D}_{m_B}(x-y) j_\mu^c(y) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где струнная мировая поверхность $\Sigma_{\mu\nu}^{(1)}(x) \equiv \Sigma_{\mu\nu}^{c,(1)}(x; 0)$ является замкнутой, в то время как струна $\Sigma_{\mu\nu}^{c,(1)}(x) \equiv \Sigma_{\mu\nu}^{c,(1)}(x; 1)$ имеет своей границей кварк-антикварковую траекторию.

Известно, что в пределе большой массы M_H скалярной частицы натяжение σ АНО струны становится большим (σ растет как $\ln M_H \sim \ln \lambda$). Поэтому можно ожидать, что в лондоновском пределе потенциал $V_c(R)$ определяется минимумом действия в уравнении (17). Этот минимум достигается на конфигурации, в которой струна типа $i = 1$ отсутствует и мировая поверхность струны типа $i = 2$ образует минимальную поверхность, натянутую на контур C :

$$\Sigma^{(1)}(x) = 0, \quad \Sigma^{c,(2)}(x) = \delta(x_2) \delta(x_3) \theta(x_1) \theta(R - x_1), \quad (18)$$

причем кварки покоятся в точках $(0,0,0)$ и $(R,0,0)$. Подставляя (18) в уравнение (17) и используя (10), получим в импульсном представлении (через p_1 обозначена проекция импульса на ось, соединяющую кварки)

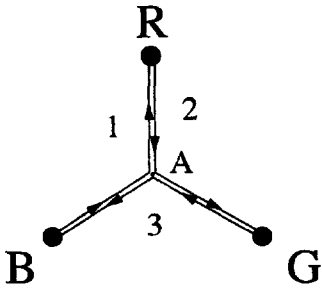
$$V_{cl}(R) = -\frac{2e^2}{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sin^2\left(\frac{p_1 R}{2}\right) \left[\frac{1}{p^2 + m_B^2} + \frac{m_B^2}{p^2 + m_B^2} \frac{1}{p_1^2} \right]. \quad (19)$$

Это выражение отличается общим числовым множителем от полученного в [10] потенциала взаимодействия статических кварков в $U(1)$ -модели, соответствующей абелево спроецированной $SU(2)$ глюодинамике. Первое слагаемое в уравнении (19) соответствует обмену массивным векторным бозоном и приводит только к потенциалу Юкавы, второе слагаемое имеет струнное происхождение. Действуя аналогично [10], получим (опуская несущественную аддитивную константу)

$$V_{cl}(R) = -\frac{e^2}{12\pi} \left\{ \frac{e^{-m_B r}}{r} + r m_B^2 \ln\left(\frac{m_\chi}{m_B}\right) + 4m_B e^{-m_B r} + 4r m_B^2 \text{Ei}(-m_B r) \right\}, \quad (20)$$

$$\text{Ei}(x) = -\int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

где $\text{Ei}(x)$ суть интегральная показательная функция. В уравнении (20) мы обрезали расходящийся интеграл на энергиях $p^2 \sim m_\chi^2 = 2\lambda v^2$, считая λ конечным (но большим), что соответствует учёту конечного размера струны [7, 9]. На малых расстояниях ($r \ll m_B^{-1}$) этот потенциал является кулоновским, а на больших расстояниях ($r \gg m_B^{-1}$) – линейно растущим и, следовательно, приводящим к невыетанию кварков. Заметим, что коэффициент при линейно растущем на больших расстояниях члене (натяжение квантово-хромодинамической струны) совпадает с результатом работы [11], полученным другим способом.



Конфигурация струн КХД в барионе. Буквами R, G, B указаны цвета кварков, цифрами – номера типов струн

Введенное представление позволяет проанализировать случай связанного состояния трех кварков. В соответствии с таблицей, они оказываются связанными струнами всех трех типов, как показано на рисунке.

Расположение струн выбрано так, чтобы они удовлетворяли условию (16). Если кварки расположены в вершинах правильного треугольника, то минимум энергии даёт конфигурация, в которой точка A расположена в его центре. Это легко увидеть, проинтегрировав δ -функцию в (14) и получив для адрона струнное действие в виде (8). В этом представлении кварки в адроне связаны только двумя из трёх струн, показанных на рисунке. Так, если струны притягиваются, то они "солются" на некотором отрезке RA . Энергия системы будет пропорциональна сумме длин отрезков $RA + BA + GA$, из чего следует, что классической конфигурации соответствует положение точки A в центре. Этот результат качественно совпадает с выводами работы [12], сделанными на основании численных расчетов.

Таким образом, классический предел струнного представления $SU(3)$ -глюодинамики, выведенного в настоящей работе в рамках дуальной $[U(1)]^2$ -модели Гинзбурга–Ландау, может служить хорошим приближением для описания кварк-антикваркового взаимодействия в $SU(3)$ -глюодинамике.

Авторы благодарны М.И.Поликарпову за полезные замечания. Работа частично финансировалась грантами 96-02-17230а и 96-15-96740 Российского фонда фундаментальных исследований и грантами INTAS-RFBR-95-0681 и INTAS-96-370.

1. G.'t Hooft, Nucl. Phys. **B190**[FS3], 455 (1981).
2. S.Mandelstam, Phys. Rep. **23C**, 245 (1976).
3. G.'t Hooft, *High Energy Physics*, Ed. A.Zichichi, Editrice Compositori, Bologna, 1976.
4. M.I.Polikarpov, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **53**, 134 (1997); M.N.Chernodub and M.I.Polikarpov, Lectures given at NATO Advanced Study Institute on Confinement, *Duality and Nonperturbative Aspects of QCD*, Cambridge, England, 23 June – 4 July 1997, hep-th/9710205.
5. S.Maedan and T.Suzuki, Prog. Theor. Phys. **81**, 229 (1989).
6. A.A.Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957); H.B.Nielsen and P.Olesen, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973).
7. E.T.Akhmedov et. al., Phys. Rev. **D53**, 2087 (1996).
8. Y.Koma, H.Suganuma, and H.Toki, hep-ph/9804289; Talk at INNOCOM '97, XVII RCNP the International Symposium on Innovative Computational Methods in Nuclear Many-Body Problems, November 1997, Osaka, Japan.
9. P.Orland, Nucl. Phys. **B428**, 221 (1994).
10. F.V.Gubarev, M.I.Polikarpov, and V.I.Zakharov, препринт ИТЭФ-ТН-28/98, hep-th/9805175.
11. H.Suganuma, S.Sasaki, and H.Toki, Nucl. Phys. **B435**, 207 (1995).
12. S.Kamizawa, Y.Matsubara, H.Shiba, and T.Suzuki, Nucl.Phys. **B389**, 563 (1993).