Письма в ЖЭТФ, том 68, вып.3, стр.194 - 319 © 1998г. 10 августа

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТУРБУЛЕНТНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*С.Н.Гордиенко, С.С.Моисеев**

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московской обл., Россия

**Институт космических исследований РАН*
117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 июня 1998 г.

Установлена связь свойств турбулентного потока с величиной силы f_0, приводящей жидкость в движение, ее пространственным r_0 и временным τ_0 масштабами. Установлено, что для такой турбулентности интеграл Лойцянского расходится. Показано, что спектральные свойства турбулентности изменяются в зависимости от величины $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0$. Спектр турбулентных пульсаций состоит из нескольких универсальных участков, возникновение и расположение которых зависит от γ. Показано, что параметр $\Gamma = \gamma^{4/3}\mathrm{Re}$ определяет удельную мощность диссипации. Подробно рассмотрены случаи больших и малых параметров γ и Γ. Выяснен физический механизм, "выключающий" диссипацию в пределе $\Gamma \gg 1$.

PACS: 05.20.Dd, 47.27.-i

Колмогоровский спектр и связанные с ним представления об универсальности, постоянном потоке энергии по спектру, инерционном интервале являются основой для современного понимания природы однородной турбулентности несжимаемой жидкости. Вместе с тем колмогоровский спектр является не единственным спектром турбулентных пульсаций, наблюдаемым экспериментально в турбулентной несжимаемой жидкости. Кроме колмогоровского спектра 5/3, хорошо известен, например, спектр 7/3, связанный с потоком спиральности [1]. Таким образом, возникает вопрос об условиях формирования того или иного спектра, то есть о нахождении параметров, определяющих спектральный состав турбулентных пульсаций в том или ином интервале волновых векторов. Проблеме определения участков спектра с универсальным поведением и параметров, ответственных за их возникновение, посвящена настоящая работа.

1. Интересуясь лишь потоками жидкости с большими числами Рейнольдса, в качестве первого шага рассмотрим уравнение Эйлера ($\mathrm{Re} = +\infty$) с внешней силой $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \ \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)\rangle = 0, \tag{1}$$

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{f}(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = f_0^2 K\left(\frac{t_1 - t_2}{\tau_0}, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_0}\right), \tag{2}$$

где K описывает корреляционные свойства силы $\mathbf{f}$, приводящей жидкость в движение, и по определению f_0^2

$$\int K\left(\frac{t}{\tau_0}, \frac{\mathbf{r}}{r_0}\right) d\mathbf{r}dt = r_0^3\tau_0.$$

Для дальнейшего важно, что последний интеграл сходится и отличен от нуля, то есть к этому сводятся ограничения, налагаемые на силы, приводящие жидкость в движение. Во избежание недоразумений специально подчеркнем, что из равенства $\langle \mathbf{f}(\mathbf{r},t)\rangle = 0$ не следует обращения в нуль обсуждаемого интеграла от функции K. Без ограничения общности можно считать силу $\mathbf{f}$ чисто соленоидальной, включив потенциальную часть в градиент давления.

2. Для изучения спектральных свойств задачи (1), (2) воспользуемся кинетическим уравнением для лагранжевых частиц несжимаемой жидкости, полученным в [2] при Re$\to +\infty$ (см. пояснения ниже):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1 + \hat{L}_2\right) F_2(t,1,2) = P(t,1,2) + P(t,2,1) + \hat{Q}(1,2)F_2, \tag{3}$$

где $F_2(t,1,2) = F_2(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_2,\mathbf{a}_2)$ – "расширенная" (то есть зависящая не только от скоростей, но и от ускорений, возникающих из-за взаимодействия лагранжевых частиц) двухчастичная функция распределения,

$$\hat{L}_i = \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + (\mathbf{a}_i + \mathbf{f}(\mathbf{r}_i,t))\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i},\ i = 1,2,$$

$$P(t,1,2) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau \hat{L}_1}\left(\int\int \hat{Q}(1,3)\hat{Q}(2,4)F_2(t-\tau,1,3)F_2(t,2,4)\,d3d4\right)d\tau,$$

$$\hat{Q}(1,2) = 2(a_{2,l} - a_{1,l})(v_{2,m} - v_{1,m})\frac{\partial^3}{\partial x_{1,l},\partial x_{1,m},\partial x_{1,p}}\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\left(\frac{\partial}{\partial a_{1,p}} - \frac{\partial}{\partial a_{2,p}}\right) -$$

$$-(v_{2,m}-v_{1,m})(v_{2,l}-v_{1,l})(v_{2,n}-v_{1,n})\frac{\partial^4}{\partial x_{1,l},\partial x_{1,m},\partial x_{1,n},\partial x_{1,p}}\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\left(\frac{\partial}{\partial a_{1,p}} - \frac{\partial}{\partial a_{2,p}}\right),$$

где по повторяющимся индексам в последней формуле предполагается суммирование, а $v_{2,l}$, $a_{2,l}$ и $v_{1,l}$, $a_{1,l}$ – l-ые компоненты векторов $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{a}_1$ соответственно.

Поясним смысл введения функций распределения, содержащих в качестве дополнительных аргументов ускорения. Обычно при построении кинетических уравнений пытаются, исходя из функций распределения, описать процессы, связанные с межчастичным взаимодействием. В [3] предложено строить кинетические уравнения, решая обратную задачу: считая заданным распределение сил в пространстве (в случае жидкости – градиента давления), вычислять многочастичные функции распределения, согласующиеся с заданным распределением "силовых" векторов. Таким образом возникают функции распределения, зависящие от ускорений. Поскольку на исходные распределения "сил" в пространстве не накладывается никаких ограничений, кроме вытекающих из законов Ньютона, подобный подход позволяет в рамках кинетического уравнения корректно описать флуктуации [4]. Более того, любая "расширенная" функция распределения содержит и такую информацию, которая содержится лишь во всем бесконечном наборе стандартных функций распределения (например, любая "расширенная" функция распределения позволяет вычислить $\langle \mathbf{a}^{2n}\rangle$ при любом n). В связи с последним становится ясным, почему в ряде задач, в которых стандартную цепочку ББГКИ оборвать невозможно, для "расширенной" двухчастичной функции распределения удается получить замкнутое уравнение [2].

Укажем, что кинетические уравнения такого типа успешно применялись для решения ряда задач физики плазмы [5].

3. Если функция $F_2(t,1,2)$ – решение уравнения (3), то функция

$$F_2^{(\Delta,\lambda)}(t,1,2) = \lambda^{18\Delta+12} F_2\left(\lambda^{1+\Delta}t, \lambda\mathbf{r}_1, \lambda^{\Delta}\mathbf{v}_1, \lambda^{2\Delta}\mathbf{a}_1, \lambda\mathbf{r}_2, \lambda^{\Delta}\mathbf{v}_2, \lambda^{2\Delta}\mathbf{a}_2\right) \tag{4}$$

также является решением уравнения (3), но с другой внешней силой

$$\mathbf{f}^{(\Delta,\lambda)}(\mathbf{r},t) = \lambda^{2\Delta+1}\mathbf{f}\left(\lambda\mathbf{r}, \lambda^{1+\Delta}t\right), \tag{5}$$

где $\lambda > 0$, Δ – произвольные числа.

Для изучения крупномасштабной структуры потока так подберем число Δ, чтобы при предельном переходе $\lambda \to +\infty$ функция $F_2^{(\Delta,\lambda)}(t,1,2)$ стремилась к конечному пределу. Для этого необходимо, чтобы коррелятор силы (5) имел конечный предел при $\lambda \to +\infty$, то есть в связи с равенством

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left\langle \mathbf{f}^{(\Delta,\lambda)}(\mathbf{r}_1,t_1)\mathbf{f}^{(\Delta,\lambda)}(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle = f_0^2 r_0^3 \tau_0 \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(t_1-t_2)\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{3\Delta-2} \tag{6}$$

следует положить $\Delta = \Delta_\infty = 2/3$. Обратим внимание, что именно из-за рассмотрения предела $\lambda \to +\infty$ в правой части (6) коррелятор K внешней силы можно заменить произведением δ-функций.

Таким образом, приходим к выводу об однородности функции $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)}$ (для доказательства однородности функции $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)}$ достаточно заметить, что, согласно определению предела, $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)} = \lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda\lambda')}$, где λ' – произвольное положительное число) и справедливости соотношения

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\rangle = C_1\left(\frac{f_0^2 r_0^3 \tau_0}{r^2}\right)^{2/3} \quad \text{при } r \gg \max\left(r_0, f_0\tau_0^2\right), \tag{7}$$

где C_1 – универсальная константа. В самом деле, выражая левую часть (7) в виде интеграла от функции $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)}$ и используя однородность этой функции, удается установить степенную зависимость рассматриваемого коррелятора от r и определить показатель степени. Заметим, что степенное поведение правой части (7) следует из однородности функции $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)}$, а степень, в которой r входит в правую часть (7), однозначно определяется числом $\Delta_\infty = 2/3$. При этом, разумеется, функциональная зависимость в (7) согласуется с размерностью параметра, входящего в (6). Специально подчеркнем, что мы не постулировали, а доказали степенной характер правой части (7). Выражение (7) описывает рождение крупных вихрей (обратный каскад) и связанные с этими вихрями длинноволновые корреляции.

Коррелятор (7) входит в так называемый интеграл Лойцянского [6]

$$\Lambda = -\frac{1}{4\pi}\int r^2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\rangle\, d^3\mathbf{r}.$$

Согласно (7), интеграл Лойцянского расходится, $\Lambda = \infty$. Таким образом, корректное описание обратного каскада для изучаемого способа возбуждения турбулентности приводит к заключению о расходимости интеграла Лойцянского. Любопытно, что до этого вопрос о сходимости интеграла Лойцянского изучался лишь для изотропного турбулентного движения с экспоненциально быстрым спаданием коррелятора

(7) на больших расстояниях в начальный момент времени, то есть в предположении, что можно создать изотропную турбулентность с незначительными длинноволновыми корреляциями. В этом предположении удается показать, что и при дальнейшей свободной эволюции интеграл Лойцянского остается конечным [6]. Выражение (7) показывает, что подобное предположение о пренебрежимо малой роли крупномасштабных вихрей (обратного каскада) для изотропной турбулентности выполнено не всегда.

Рассмотрение мелкомасштабной структуры потока (1), (2) сводится к выбору в (4) $\Delta = \Delta_0 = -1/2$, обеспечивающего существование конечной однородной функции $\lim_{\lambda\to+0} F_2^{(-1/2,\lambda)}$. Из этого вытекает

$$\left\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r},t) - \mathbf{v}(0,t))^2 \right\rangle = C_2 f_0 r \text{ при } r \ll \min\left(r_0, f_0\tau_0^2\right), \tag{8}$$

где C_2 – универсальная константа.

Для изучения потока на масштабах от r_0 до $f_0\tau_0^2$ остановимся на двух предельных случаях: $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0 \ll 1$ и $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0 \gg 1$.

4. Пусть $\gamma \ll 1$. Рассмотрим F_2 при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r_0$. Для этой области расстояний коррелятор силы (2) можно положить равным

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{f}(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = f_0^2 K\left(\frac{t_1 - t_2}{\tau_0}, 0\right). \tag{9}$$

Применим рассуждения, приведшие к (7), к коррелятору (9). Заметим, что использование (9) гарантирует рассмотрение области расстояний $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r_0$, а предел $\lambda \to +\infty$ обеспечивает $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg \gamma r_0$. Таким образом находим, что при $\gamma r_0 \ll$ $\ll |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r_0$ течение можно описывать однородной функцией $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(-1/3,\lambda)}$ и справедливо равенство

$$\left\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r},t) - \mathbf{v}(0,t))^2 \right\rangle = C_3 \left(f_0^2\tau_0 r\right)^{2/3} \text{ при } \gamma r_0 \ll r \ll r_0, \tag{10}$$

то есть в этом интервале масштабов справедлив закон Колмогорова – Обухова. Вопрос о безвязком, но с конечной диссипацией, пределе в уравнении Эйлера и формировании колмогоровского спектра в этом случае рассматривался в [1].

5. Пусть $\gamma \gg 1$. Рассмотрим F_2 при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll f_0\tau_0^2$. Для этой области масштабов коррелятор силы (2) можно переписать как

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{f}(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = f_0^2 K\left(0, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_0}\right), \tag{11}$$

так как характерное значение скорости лагранжевых частиц жидкости, согласно (8), не меньше $(f_0 r_0)^{1/2}$ и расстояние, проходимое лагранжевой частицей за время порядка τ_0, составляет величину порядка $\gamma^{1/2} r_0$.

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем пункте, позволяют заключить, что при $r_0 \ll |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll \gamma r_0$ для описания турбулентного потока жидкости можно использовать однородную функцию $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(1/4,\lambda)}$, причем

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\rangle = C_4 \left(\frac{f_0^2 r_0^3}{r}\right)^{1/2} \text{ при } r_0 \ll r \ll \gamma r_0. \tag{12}$$

Таким образом, структура турбулентного потока в области пространственных масштабов от r_0 до $f_0\tau_0^2$ определяется значением параметра $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0$.

6. Учтем наличие в задаче конечной вязкости ν, то есть существование еще одного характерного масштаба – вязкой длины. Покажем, что энергия, диссипируемая в единицу времени в единице массы (удельная мощность диссипации ϵ), определяется новым безразмерным параметром

$$\Gamma = \gamma^{4/3}\mathrm{Re}, \tag{13}$$

где Re$= r_0 \left(f_0^2 r_0 \tau_0\right)^{1/3} / \nu$ при $\gamma \ll 1$ и где Re$= r_0 \left(f_0 r_0\right)^{1/2} / \nu$ при $\gamma \gg 1$. Рассмотрим подробно три различных случая, которые могут реализовываться в турбулентных течениях (Re $\gg 1$).

7. При $\gamma \ll 1$, $\Gamma \ll 1$, согласно (8), (10), вязкая длина превышает $f_0\tau_0^2$, то есть колмогоровский спектр непосредственно примыкает к вязкому интервалу. Удельная мощность диссипации ϵ в этом случае, оцениваемая как вязкие потери на масштабах порядка вязкой длины, составляет

$$\epsilon \sim f_0^2 \tau_0, \tag{14}$$

то есть не зависит от вязкости (сравните с (10)).

8. Пусть по-прежнему $\gamma \ll 1$, но $\Gamma \gg 1$. Тогда из (8), (10) следует, что размер $f_0\tau_0^2$ значительно превышает вязкую длину, то есть колмогоровский спектр отделен от вязкого интервала спектром (8). Удельная мощность диссипации оценивается при этом как

$$\epsilon \sim \nu^{1/3} f_0^{4/3}, \tag{15}$$

то есть примерно в Re$^{1/3}$ раза меньше потока энергии по колмогоровскому участку спектра.

Чтобы понять физический смысл (15), заметим, что внешняя сила $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ наиболее эффективно взаимодействует с пульсациями жидкости, которые либо имеют "резонансный" волновой вектор $k \sim 1/r_0$, либо "резонансную" частоту $\omega \sim 1/\tau_0$ ($k \sim 1/f_0\tau_0^2$). Согласно (14), (15), пульсации, находящиеся в "пространственном резонансе" с внешней силой, эффективно возбуждаются (находятся в "фазе" с внешней силой и последняя эффективно их "раскачивает"). По колмогоровскому участку спектра энергия поступает к модам, находящимся во "временном резонансе" с внешней силой, которые "колеблются" в "противофазе" с внешней силой, то есть внешняя сила "гасит" колебания с $k \sim 1/f_0\tau_0^2$ и "забирает" энергию из этих мод. Следовательно, можно сказать, что внешняя сила выступает одновременно как источник энергии, так и "сток" для энергии. Таким образом, при $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$ в жидкости "выключается" диссипация, что должно иметь значение в теории машущего полета и кризиса сопротивления.

Важным с практической точки зрения представляется то, что снижение сопротивления (кризис сопротивления), связанный с "выключением" вязкой диссипации согласно (15), возникает уже при увеличении мощности источника, то есть без каких-либо дополнительных требований на изменение структуры границы.

9. При $\gamma \gg 1$ величина Γ всегда подчинена неравенству $\Gamma \gg 1$. Легко убедиться, что в этом случае удельная мощность диссипации определяется выражением (15).

10. Учитывая значение скейлинга (8) в "выключении" диссипации в турбулентной жидкости, выясним, с каким интегралом движения этот скейлинг может быть связан, то есть укажем сохраняющуюся для идеальной жидкости величину, плотность которой имеет единицу измерения, совпадающую с единицей измерения f_0.

Такой величиной является спиральность $G = \int \mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\, d^3\mathbf{r}$. Следовательно, формирование (8) и выключение диссипации может быть связано с флуктуациями спиральности вблизи вязкого интервала (так называемый I-инвариант [7]).

Авторы выражают искреннюю благодарность С.И.Анисимову и Э.И.Юрченко за интерес к работе и полезную дискуссию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 98–02–17229, 98–02–17441 и Совета по программе поддержки ведущих научных школ 96–15–96448.

---

1. S.Moiseev and O.Onishenko, Physica **B228**, 83 (1996).
2. С.Н.Гордиенко, Физика плазмы (в печати).
3. С.Н.Гордиенко, ЖЭТФ **106**, 436 (1994).
4. М.А.Леонтович, ЖЭТФ **5**, 211 (1935).
5. С.Н.Гордиенко, Э.И.Юрченко, Письма в ЖЭТФ **67**, 640 (1998).
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
7. А.В.Белян, С.С.Моисеев, О.Г.Чхетиани, *Турбулентная вязкость в спиральной турбулентности*, М.: ИКИ РАН, 1992, Пр. 1845.