

ЯВЛЕНИЯ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ПОЛИАЦЕТИЛЕНЕ: $R^1 \times S^1$ МОДЕЛЬ ГРОССА-НЕВЬЕ С ХИМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М.А.Вдовиченко, А.К.Клименко*

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
117454 Москва, Россия

* Физический факультет Московского государственного университета
117234 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 июля 1998 г.

Исследована фазовая структура двумерной модели Гросса – Невье в пространстве-времени вида $R^1 \times S^1$ при наличии химического потенциала μ . В плоскости параметров (μ, λ) , где $\lambda = 1/L$, а L – длина окружности S^1 , построен фазовый портрет модели, на котором существуют две массивных со спонтанно нарушенной киральной инвариантностью фазы, а также бесконечно много безмассовых симметричных фаз. Такая вакуумная структура приводит к осцилляциям критической кривой киральных фазовых переходов $\mu_c(\lambda)$. Кроме того, осциллирует и плотность числа частиц в вакуумном состоянии модели, если $\mu > \mu_c(\lambda)$.

PACS: 11.15.Pg

Введение. Двумерная квантовая теория поля с лагранжианом вида

$$L_\psi = \sum_k \bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \frac{g}{2N} \left[\sum_k \bar{\psi}_k \psi_k \right]^2 \quad (1)$$

называется моделью Гросса – Невье (ГН) [1]. В (1) ψ_k являются двухкомпонентными спинорами Дирака для каждого фиксированного значения $k = 1, \dots, N$, а L_ψ симметричен относительно дискретного кирального преобразования $\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k$. Очень часто вместо (1) рассматривается лагранжиан

$$L_\sigma = \sum_k [\bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k] - N \sigma^2 / 2g, \quad (2)$$

который на уравнениях движения, где $\sigma = \sum \bar{\psi}_k \psi_k$, эквивалентен (1). Первоначально модель была предложена в качестве простого примера, демонстрирующего некоторые свойства квантовой хромодинамики, а именно: асимптотическую свободу, спонтанное нарушение киральной инвариантности, размерную трансмутацию и др. Часть из них вытекает из следующего выражения для эффективного потенциала модели, полученного в главном порядке $1/N$ разложения [1]:

$$V_0(\sigma) = \frac{N\sigma^2}{2g} + \frac{iN}{(2\pi)^2} \int d^2 p \ln(\sigma^2 - p^2) = \frac{N\sigma^2}{4\pi} [2 \ln(\sigma/M) - 1]. \quad (3)$$

После перенормировки $V_0(\sigma)$ записан только с помощью размерного параметра M , физический смысл которого – динамическая масса фермионов (размерная трансмутация).

Позднее на основе модели ГН исследовались и такие общие вопросы теории, как влияния температуры и ненулевой плотности частиц [2–4], нетривиальной топологии пространства [5, 6], различных полей [7], включая гравитационные [8, 9], на

киральные свойства вакуума. Кроме того, в работах [11, 12] было показано, что для целого ряда квазиодномерных соединений, названных пайерлсовскими диэлектриками (ПД), микроскопические модели электронных состояний в континуальном пределе вполне аналогичны двумерным квантовым теориям поля. В частности, модель ГН с $N = 2$ оказалась наиболее адекватной теорией, описывающей электрическую проводимость одного из ПД, который называется полиацетиленом $(\text{CH})_x$. В чистом виде, без примесей, полиацетилен, как и другие ПД, является диэлектриком. При слабом легировании, когда концентрация примесных электронов (дырок) не превышает 6%, он является проводником с бесспиновыми переносчиками электрического заряда, обладающим диамагнитными свойствами. Однако, когда концентрация примесей достигает 6% и выше, резко меняются его магнитные свойства. Он становится парамагнетиком с помощью фазового перехода первого рода. (Более подробно об этих и других свойствах ПД можно посмотреть в обзорах [13].)

Указанный фазовый переход в полиацетилене исследовался в рамках двумерной модели ГН с химическим потенциалом μ в работах [14, 15], где в лидирующем порядке по N было показано, что при критическом значении химического потенциала $\mu_c = M/\sqrt{2}$ в модели происходит переход первого рода из фазы с нарушенной киральной инвариантностью (фаза, в которой фермионы имеют массу M) в симметричную фазу с безмассовыми электронами проводимости ¹⁾. (Ранее модель уже использовалась для качественного рассмотрения свойств ПД [16].)

Предлагаемая работа также посвящена исследованию солитон-металлического фазового перехода в ПД в рамках двумерной модели (1) при $\mu \neq 0$ в случае, когда пространство-время имеет топологию вида $R^1 \times S^1$ (компактифицирована пространственная ось, свернутая в окружность S^1 длины L).

В реальности большинство ПД являются трехмерными кристаллами, в которых из-за особенностей кристаллической структуры движение электронов практически одномерно. Благодаря внешнему напряжению кристаллическая решетка может быть деформирована, при этом движение электронов становится криволинейным. Рассматривая здесь предельный случай движения по окружности S^1 , мы, конечно, имеем в виду, что он может быть использован для описания процессов в деформированных кристаллах ПД при больших значениях L , то есть в лабораторных условиях. (Забегая вперед, отметим, что именно в этой области наиболее ярко проявляются обнаруженные нами осцилляции проводимости и критической кривой кирального фазового перехода.) Кроме того, мы надеемся, что полученные в предлагаемой работе результаты будут полезны для качественных аналогий при построении теории суперструн, при описании явлений типа эффекта Казимира и т.д., то есть в тех случаях, где пространство-время имеет нетривиальную топологию.

1. Фазовая структура модели. Свойства вакуума однозначно связаны со структурой глобального минимума эффективного потенциала модели, который в главном порядке $1/N$ -разложения при произвольных значениях μ, L имеет вид [5]

$$V_{\mu L}(\sigma) = V_L(\sigma) - N\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \theta(\mu - \sqrt{\sigma^2 + (2\pi n\lambda)^2}) (\mu - \sqrt{\sigma^2 + (2\pi n\lambda)^2}), \quad (4)$$

где $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $\lambda = 1/L$, $\alpha_n = 2 - \delta_{n0}$, а также

$$V_L(\sigma) = V_0(\sigma) - \frac{N}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \ln[1 - \exp(-L\sqrt{\sigma^2 + p_0^2})]. \quad (5)$$

¹⁾ Это выражение для μ_c было также получено в работах [3, 4].

Глобальный минимум функции (5), в которую переходит потенциал (4) при $\mu = 0$, находится в точке $\sigma_0(\lambda)$. При этом $\sigma_0(\lambda) \rightarrow M$, если $\lambda \rightarrow 0$, и $\sigma_0(\lambda) \sim \pi\lambda / \ln(\lambda/\lambda_0)$, если $\lambda \rightarrow \infty$. Здесь $4\pi\lambda_0 = M \exp(\gamma)$, $\gamma = 0,577\dots$, – постоянная Эйлера.

Наша задача – исследование функции (4) на абсолютный минимум. Уравнение стационарности для нее выглядит так:

$$\frac{\sigma}{\pi} \left\{ \ln \frac{\lambda}{\lambda_0} + I(\sigma) - \frac{\pi\lambda}{\sigma} + \pi\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{\theta(\mu - \sqrt{\sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2})}{\sqrt{\sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2}} \right\} = 0, \quad (6)$$

где

$$I(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ 1/n - [n^2 + (\sigma/2\pi\lambda)^2]^{-1/2} \}. \quad (7)$$

Структура уравнения (6) диктует следующий алгоритм его решения. Давайте разобьем плоскость параметров (μ, λ) на области ω_k :

$$(\mu, \lambda) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \omega_k; \quad \omega_k = \{(\mu, \lambda) : 2\pi\lambda k \leq \mu < 2\pi\lambda(k+1)\}, \quad (8)$$

а затем будем исследовать это уравнение последовательно в каждой из областей ω_k .

Предположим, что $(\mu, \lambda) \in \omega_0$. Уравнение стационарности здесь имеет более простой вид:

$$\frac{\sigma}{\pi} \{ \ln(\lambda/\lambda_0) + I(\sigma) - \frac{\pi\lambda}{\sigma} [\theta(\mu - \sigma) - 1] \} = 0. \quad (9)$$

Отсюда ясно, что при $\lambda > \lambda_0$ уравнение (9) имеет только два решения: $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = \sigma_0(\lambda)$, каждое из которых – локальный минимум для потенциала $V_{\mu L}(\sigma)$. В этом случае очевидно, что критические значения химического потенциала $\mu_{0c}(\lambda)$, при которых глобальный минимум потенциала $V_{\mu L}(\sigma)$ переходит из σ_1 в σ_2 и обратно, определяется уравнением

$$V_{\mu L}(0) = V_{\mu L}(\sigma_0(\lambda)), \quad (10)$$

которое в области ω_0 можно решить точно:

$$\mu_{0c}(\lambda) = [V_L(0) - V_L(\sigma_0(\lambda))] / (N\lambda). \quad (11)$$

При $\mu > \mu_{0c}(\lambda)$ мы имеем безмассовую симметричную фазу модели (множество A_0 на рисунке). Если $\mu < \mu_{0c}(\lambda)$, то в модели реализуется фаза со спонтанным нарушением киральной инвариантности, в которой фермионы имеют массу $\sigma_0(\lambda)$ (на рисунке это область B).

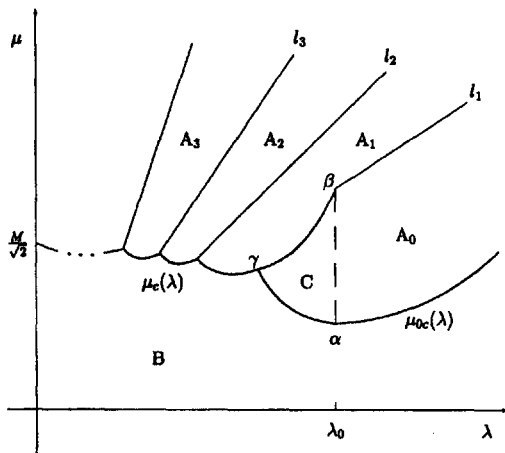
Если $\lambda < \lambda_0$, то $\sigma_1 = 0$ будет уже точкой локального максимума потенциала (4). Вместо нее здесь у $V_{\mu L}(\sigma)$ появляется другой локальный минимум – точка $\sigma_3 = \bar{\sigma}_0(\lambda) \neq 0$, которая при $\lambda = \lambda_0$ обращается в нуль. Значения химического потенциала $\mu_1(\lambda)$, при которых эти минимумы равносильны, определяются уравнением

$$V_{\mu L}(\bar{\sigma}_0(\lambda)) = V_{\mu L}(\sigma_0(\lambda)). \quad (12)$$

Кривая $\mu = \mu_1(\lambda)$ отделяет фазу B от другой массивной фазы, где масса фермионов равна $\bar{\sigma}_0(\lambda)$ (на рисунке это множество C). Отметим также, что переходы между A_0 и B , и между B и C есть фазовые переходы первого рода. Однако переход из C в A_0 и наоборот есть фазовый переход второго рода. Границей между фазами

C и A_0 является прямая линия $\alpha\beta$ (см. рисунок), где $\alpha = \{(\lambda, \mu) : \lambda = \lambda_0, \mu = (0.796\dots)2\pi\lambda_0\}$, $\beta = \{(\lambda, \mu) : \lambda = \lambda_0, \mu = 2\pi\lambda_0\}$.

Аналогичным образом с помощью численных исследований можно показать, что в области ω_1 существует критическая кривая $\mu_c(\lambda)$ (на рисунке это кривая $\beta\gamma$), которая удовлетворяет уравнению $V_{\mu L}(0) = V_{\mu L}(\bar{\sigma}_0(\lambda))$ и пересекается с кривой $\mu_1(\lambda)$ в точке $\gamma = \{(\lambda, \mu) : \lambda = (0.841\dots)\lambda_0, \mu = (0.865\dots)2\pi\lambda_0\}$. В этой же точке начинается кривая фазовых переходов первого рода $\mu = \mu_c(\lambda)$, определяемая из уравнения (10), на которой вакуум модели резко меняет свойства симметрии.



Известно, что значение эффективного потенциала в точке глобального минимума есть термодинамический потенциал (ТДП) системы. Поэтому в области, лежащей выше кривой $\mu = \mu_c(\lambda)$, ТДП $\Omega(\mu, \lambda)$ имеет вид

$$\Omega(\mu, \lambda) \equiv V_{\mu L}(0) = V_L(0) - N\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \theta(\mu - 2\pi k\lambda)(\mu - 2\pi k\lambda). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что первая производная $\partial\Omega/\partial\mu$, то есть плотность числа частиц в основном состоянии системы, скачком меняет свое значение при пересечении каждой из границ между областями ω_k (8). Следовательно, на линиях $l_k = \{(\lambda, \mu) : \mu = 2\pi k\lambda\}$ мы имеем фазовые переходы первого рода, и выше кривой $\mu = \mu_c(\lambda)$ (кривая киральных фазовых переходов) располагается бесконечно много безмассовых симметричных фаз модели (на рисунке это области A_0, A_1, \dots).

Полный фазовый портрет модели представлен на рисунке, где пунктирная линия – кривая фазовых переходов второго рода, на остальных кривых происходят фазовые переходы первого рода. Отметим, что существуют две трикритических точки α, β и бесконечно много тройных точек, в каждой из которых сходятся три кривых первого рода (это точки пересечения линий l_k при $k > 1$ с кривой $\mu = \mu_c(\lambda)$, а также точка γ).

2. Осцилляции критической кривой $\mu_c(\lambda)$. Непосредственные численные исследования кривой $\mu = \mu_c(\lambda)$ показывают, что в бесконечном числе точек ее пересечения с линиями l_k эта кривая имеет характерные изломы. Такое поведение любой

²⁾ Более подробно свойства модели в области ω_0 представлены в работе [5].

функции на практике обычно называется осциллирующим. Выделим осциллирующую составляющую критической кривой в явном виде. С этой целью представим уравнение (10), которому удовлетворяет $\mu_c(\lambda)$, в более детальном виде:

$$V_L(0) - V_L(\sigma_0(\lambda)) = N\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \theta(\mu - 2\pi k\lambda)(\mu - 2\pi k\lambda). \quad (14)$$

Левую часть (14) обозначим как $\Delta V(\lambda)$, а правую часть преобразуем с помощью формулы суммирования Пуассона [17]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Phi(k) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{\infty} \Phi(x) \cos(2\pi kx) dx \quad (15)$$

(коэффициенты α_k определены в (4)). После вычисления интегралов, стоящих в (15), для $\mu_c(\lambda)$ получаем уравнение

$$\Delta V(\lambda) = \frac{N\mu_c^2(\lambda)}{2\pi} - \frac{2N\lambda^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\mu_c(\lambda)L) - 1}{k^2}. \quad (16)$$

Из (5), (3), а также соотношения $\sigma_0(\lambda) \rightarrow M$ при $\lambda \rightarrow 0$ следует, что $\Delta V(\lambda) = NM^2/4\pi + O(\exp(-M/\lambda))$. С учетом (16) это означает, что $\mu_c(\lambda) \rightarrow M/\sqrt{2}$ при $\lambda \rightarrow 0$. Кроме того, теперь нетрудно решить уравнение (16) в области малых λ :

$$\mu_c(\lambda) = \frac{M}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}\lambda^2\pi^2}{6M} + \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kML/\sqrt{2})}{k^2} + o(\lambda^2). \quad (17)$$

Отсюда видно, что $\mu_c(\lambda)$ при $L \rightarrow \infty$ осциллирует с частотой $M/2\sqrt{2}\pi$.

3. Осцилляции ТДП и плотности числа частиц. Предположим, что $\mu > M/\sqrt{2}$. Тогда состояние термодинамического равновесия системы описывается ТДП $\Omega(\mu, \lambda)$ (13). Нетрудно видеть, что $\Omega(\mu, \lambda)$ также осциллирует с ростом L или μ . В самом деле, применим к бесконечной сумме в (13) формулу суммирования Пуассона (15). В результате получим выражение

$$\Omega(\mu, \lambda) = -\frac{N\mu^2}{2\pi} + \frac{2N\lambda^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\mu L) - 1}{k^2}, \quad (18)$$

в котором в явном виде выделена осциллирующая составляющая. Плотность числа частиц $n(\mu, \lambda)$ в основном состоянии определяется соотношением $n(\mu, \lambda) = -\partial\Omega/\partial\mu$. С учетом (18) в данной модели она имеет вид

$$n(\mu, \lambda) = \frac{N\mu}{\pi} + \frac{2N\lambda}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\mu L)}{k}, \quad (19)$$

то есть осциллирует при $\mu = \text{const}$ и больших значениях L с частотой $\mu/2\pi$. Если $L = \text{const}$, то с ростом μ плотность осциллирует с частотой $L/2\pi$.

Заключение. В предлагаемой работе в главном порядке $1/N$ -разложения исследована фазовая структура двумерной модели Гросса-Невье в пространстве $R^1 \times S^1$ с химическим потенциалом. На фазовой диаграмме рисунка существуют две массивные, а также бесконечно много безмассовых фаз модели. Фазы отделяются друг

от друга критическими кривыми как первого, так и второго рода, на пересечении которых лежат две трикритические точки и бесконечно много тройных точек. Следствием полученной фазовой структуры являются осцилляции критической кривой кирального фазового перехода, при котором происходит восстановление киральной симметрии, а также осцилляции плотности числа частиц $n(\mu, \lambda)$ в основном состоянии модели. (Еще большим разнообразием критических свойств обладает четырехмерная модель Намбу – Йона – Лазинио в пространстве-времени вида $R^3 \times S^1$ при наличии химического потенциала [18].)

Если модель ГН на самом деле близка к отражению реальных свойств полиацетилена или других ПД, то в экспериментах с этими веществами, как следует из (17), можно будет наблюдать осцилляции критической степени легирования, приводящей к переходу из солитонной фазы в металлическую, в зависимости от кривизны исследуемого образца. Так как электрическая проводимость пропорциональна $n(\mu, \lambda)$ (19), то, кроме того, в экспериментах по изучению металлической фазы пайерлсовских диэлектриков должна осциллировать и их проводимость как с ростом L при постоянной концентрации примесных электронов (которая пропорциональна μ), так и при постоянной кривизне L , но при увеличении степени легирования, то есть с ростом μ .

-
1. D.J.Gross, A.Neveu, Phys. Rev. **D10**, 3235 (1974).
 2. L.Jacobs, Phys. Rev. **D10**, 3956 (1974); W.Dittrich and B.G.Englert, Nucl. Phys. **B179**, 85 (1981).
 3. К.Г.Клименко, ТМФ **75**, 226 (1988); A.Barducci, R.Casalbuoni, M.Modugno et al., Phys. Rev. **D51**, 3042 (1995).
 4. U.Wolf, Phys. Lett. **B157**, 303 (1985); T.Inagaki, T.Kouno, and T.Muta, Int. J. Mod. Phys. **A10**, 2241 (1995).
 5. А.С.Вшивцев, К.Г.Клименко, Б.В.Магницкий, Письма в ЖЭТФ **61**, 847 (1995).
 6. S.K.Kim, W.Namgung, K.S.Soh, and J.H.Yee, Phys. Rev. **D36**, 3172 (1987); D.Y.Song and J.K.Kim, Phys. Rev. **D41**, 3165 (1990); F.Ravndal and C.Wotzasek, Phys. Lett. **B249**, 266 (1990); S.Huang and B.Schreiber, Nucl. Phys. **B426**, 644 (1994).
 7. S.Kawati, G.Konisi, and H.Miyata, Phys. Rev. **D28**, 1537 (1983).
 8. I.L.Buchbinder and E.N.Kirillova, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 143 (1989); T.Muta, S.D.Odintsov, and H.Sato, Mod. Phys. Lett. **A7**, 3765 (1992); E.Elizalde, S.Naftulin, and S.D.Odintsov, Phys. Rev. **D54**, 5010 (1996); S.Kanemura and H.-T.Sato, Mod. Phys. Lett. **A10**, 1777 (1995); Mod. Phys. Lett. **A11**, 785 (1996).
 9. T.Inagaki, T.Muta, and S.D.Odintsov, Progr. Theor. Phys. Suppl. **127**, 93 (1997).
 10. K.G.Klimenko, *Gross-Neveu model and Optimized Expansion method*, Preprint IHEP 90-95, Protvino, 1990; H.Yamada, Mod. Phys. Lett. **A6**, 3405 (1991); **A9**, 1195 (1994); **A9**, 5651 (1994); V.E.Rochev and P.A.Saponov, *The four - fermion interaction in D = 2, 3, 4: a nonperturbative treatment*, hep-th/9710006.
 11. С.А.Бразовский, Письма в ЖЭТФ **28**, 656 (1978); ЖЭТФ **78**, 677 (1980).
 12. W.P.Su, J.R.Schrieffer, and A.J.Heeger, Phys. Rev. Lett. **42**, 1698 (1979).
 13. Л.Н.Булаевский, УФН **115**, 263 (1975); И.В.Криве, А.С.Рожавский, УФН **152**, 33 (1987); A.J.Heeger, S.Kivelson, J.R.Schrieffer, and W.P.Su, Rev. Mod. Phys. **60**, 781 (1988).
 14. В.А.Осипов, В.К.Федянин, *Континуальная модель полиацетилена и двумерные модели релятивистской теории поля*, Краткие сообщения ОИЯИ No. 4-84, Дубна, 1984, стр.33; ТМФ **73**, 393 (1987).
 15. A.Chodos and H.Minakata, Phys. Lett. **A191**, 39 (1994); Nucl. Phys. **B490**, 687 (1997).
 16. И.В.Криве, А.С.Рожавский, ЖЭТФ **81**, 1811 (1981); D.K.Campbell and A.R.Bishop, Nucl. Phys. **B200**, 297 (1982); H.-T.Sato and H.Tochimura, Mod. Phys. Lett. **A11**, 3091 (1996).
 17. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Статистическая физика*, ч.1, М.: Наука, 1976, стр.196.
 18. А.С.Вшивцев, А.К.Клименко, К.Г.Клименко, ЯФ **61**, 543 (1998); М.А.Вдовиченко, А.С.Вшивцев, К.Г.Клименко, ЖЭТФ **114**, (1998), в печати.