Письма в ЖЭТФ, том 68, вып.9, стр.715 - 720 © 1998г. 10 ноября

$\bar{\partial}$- ПРОБЛЕМА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

А.И.Зенчук[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 9 сентября 1998 г.

Обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза, имеющее, в частности, приложение в гидродинамике, по существу является первым примером, в котором $\bar{\partial}$-одевание нелинейного уравнения строится с помощью введения в одевающий оператор произвольной функции независимых переменных этого уравнения. Предложенный алгоритм выявляет класс решений указанного уравнения, выражающихся через решения алгебраических уравнений. Приведен пример решения нового типа, производная которого по независимым переменным имеет степенную особенность в некоторой точке.

PACS: 02.30.-f, 03.65.-w

$\bar{\partial}$-проблема [1, 2] является современной версией метода одевания [3] – основного метода построения решений широкого класса интегрируемых нелинейных уравнений математической физики, таких как уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ). В данной работе предложен новый алгоритм построения решений обобщенного уравнения КдВ [4], которое, как и само уравнение КдВ, имеет приложение в гидродинамике [5], где оно описывает одно из приближений мелкой воды (если $\Gamma > 0$ в уравнении (1), см. ниже). Его полная интегрируемость была доказана в [4]. Регулярный метод построения решений этого уравнения посредством обратной спектральной задачи рассеяния [6, 7] сталкивается с проблемой решения спектрального уравнения (19) (см. ниже). Мы сформулируем метод одевания для обобщенного уравнения КдВ с помощью нелокальной $\bar{\partial}$-проблемы, что сводит процесс построения решений нелинейного уравнения к решению линейного интегрального и алгебраического уравнений. Этот подход демонстрирует возможности использования одной из последних модификаций метода одевания, основанной на введении в одевающий оператор произвольной функции независимых переменных (времени и координаты) [8, 9], которая позволяет строить широкий класс решений обобщенного уравнения КдВ, явно выражающихся через решения алгебраических уравнений. Простейшее решение, построенное таким способом, является представителем нового класса решений солитонного типа, первая производная которого по независимым переменным имеет *степенную особенность* в некоторой точке. Отметим, что в рассмотренных ранее решениях пиконного типа [5] производные имеют *конечный скачок* в некоторой точке.

Нелинейное уравнение, о котором идет речь, выглядит следующим образом:

$$m_t + 2\kappa u_x - um_x - 2u_x m = 0, \quad m = u_{xx} - \Gamma u \tag{1}$$

(здесь Γ, κ – действительные постоянные). Нелокальной $\bar{\partial}$-проблемой называется интегральное уравнение (в данном случае скалярное) на плоскости комплексного

[1)] e-mail: zenchuk@itp.ac.ru

параметра λ.

$$\psi(\lambda;x,t)=\eta+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\nu\wedge d\bar{\nu}}{\nu-\lambda}\int\psi(\mu;x,t)R(\mu,\nu;x,y)d\mu\wedge d\bar{\mu},\quad \eta=\frac{1}{\lambda},\tag{2}$$

где δ – дельта-функция Дирака ($\int\delta(\lambda)d^2\lambda=-2i$, $i^2=-1$), R – ядро интегрального оператора, обеспечивающее однозначную разрешимость уравнения (2), функция η называется нормировкой задачи (для данной задачи она имеет конкретный вид). Чтобы выявить связь этого линейного уравнения с уравнением (1), поступим следующим образом. Прежде всего, введем параметры x,t, которые являются независимыми переменными искомого нелинейного уравнения, в ядро R следующим образом:

$$R(\mu,\lambda;x,t)=R_0(\mu,\lambda)e^{K(\mu;x,t)-K(\lambda;x,t)},\quad K(\lambda;x,t)=\lambda\Phi+\frac{\gamma t}{\lambda-a},\quad a\neq 0.\tag{3}$$

Здесь a,γ – константы, $\Phi=\Phi(x,t)$ – произвольная функция своих аргументов, о которой шла речь в начале статьи. В дальнейшем нам потребуются асимптотики функции $\psi(\lambda)$ при $\lambda\to\infty,0$, которые, согласно уравнению (2), имеют следующиий вид

$$\psi\to\sum_{k>0}\frac{\psi_k}{\lambda^k},\quad \lambda\to\infty,\quad \psi\to\frac{1}{\lambda}+\sum_{k\geq 0}\psi_k(0)\lambda^k,\quad \lambda\to 0,\tag{4}$$

$$\psi_k\equiv\psi_k(x,t)=\frac{i}{2\pi}\int\nu^{k-1}d\nu\wedge d\bar{\nu}\int\psi(\mu;x,t)R(\mu,\nu;x,t)d\mu\wedge d\bar{\mu},$$

$$\psi_k(0)\equiv\psi_k(0;x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{\nu}\right)^{k+1}d\nu\wedge d\bar{\nu}\int\psi(\mu;x,t)R(\mu,\nu;x,t)d\mu\wedge d\bar{\mu}.$$

Обратим внимание на тот факт, что ввиду (3) функции $\psi_k,\psi_k(0)$ явно зависят от произвольной функции Φ. Это замечание будет использовано в дальнейшем (см. ниже (12), (13)). Кроме того, наложим на ядро R дополнительное условие, необходимое для реализации алгоритма построения нелинейного уравнения:

$$R(\mu,\lambda)\left(\Omega(\mu)-\Omega(\lambda)\right)=0,\quad \Omega(\lambda)=\frac{1}{\lambda(\lambda-a)},\tag{5}$$

которое означает, что R_0 имеет вид

$$R_0=r_0(\mu,\lambda)\left(\delta(\lambda-\mu)+\delta(\lambda+\mu-a)\right).$$

Теперь $\bar{\partial}$-проблема сформулирована полностью. Далее приведен краткий алгоритм построения уравнения (1) (подробный вывод нелинейных уравнений из $\bar{\partial}$-проблемы (2) дан в [1, 2]) и указаны его особенности, вызванные присутствием в задаче произвольной функции Φ [8].

Пусть ядро R_0 обеспечивает единственность решения уравнения (2). Тогда наряду с ψ следующие функции будут решениями уравнения (2) с тем же ядром R, но с другими нормировками η, которые легко получить прямым вычислением (мы не приводим здесь явного вида нормировок (см. [1, 2])):

$$D_x\psi\equiv(\partial_x+\partial_x K)\psi=\psi_x+\Phi_x\lambda\psi,\quad D_x^2\psi,\tag{6}$$

$$D_t\psi \equiv (\partial_t + \partial_t K)\psi = \psi_t + \Phi_t\lambda\psi + \frac{\gamma}{\lambda - a}\psi, \quad \Omega^k\psi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Нашей задачей является, используя комбинации этих решений, построить тождественно равное нулю решение уравнения (2) или, что то же самое, решение с нулевой нормировкой. К такому решению приводят две независимые комбинации функций (6):

$$L_1\psi \equiv D_t\psi - uD_x\psi + V\Omega D_x\psi + W\psi = 0, \tag{7}$$

$$L_2\psi \equiv D_xD_x\psi - U_1\frac{1}{\Omega}\psi - U_2D_x\psi = 0, \tag{8}$$

где

$$V^{-1} = -\left(\frac{\psi_x(a)}{a} + \Phi_x\psi(a)\right)\frac{1}{\gamma\psi(a)}, \tag{9}$$

$$u = \frac{\Phi_t}{\Phi_x}, \quad W = \frac{\gamma}{a} + \frac{\psi_{1x}(0)}{a} + \frac{\Phi_x}{a}, \tag{10}$$

$$U_1 = \Phi_x^2, \quad U_2 = \frac{1}{\psi_1\Phi_x}(2\Phi_x\psi_{1x} + \Phi_{xx}\psi_1 + U_1a\psi_1). \tag{11}$$

Уравнения (7), (8) формируют переопределенную систему линейных уравнений. Поскольку ее коэффициенты содержат произвольную функцию Φ, можно наложить на них дополнительное условие, которое будет уравнением на функцию Φ, сняв тем самым произвол в ее выборе. Пусть таким условием будет редукция $V = 1$. С учетом (9) это означает

$$\psi(a) \neq 0, \quad \psi_x(a) = -(\Phi_x + \gamma)a\psi(a) \tag{12}$$

или

$$\psi(a) = ce^{-(\Phi+\gamma x)a}, \qquad c = \mathrm{const} \neq 0. \tag{13}$$

Уравнение (14) в общем случае решается численными методами, поскольку явная зависимость $\psi(a)$ от Φ определяется выбором ядра R_0 и может быть довольно сложной. В частных случаях оно может решаться аналитически. Такая ситуация рассматривается в приведенных ниже примерах.

Из условия (12) следует, что U_2 =const в уравнении (8). В самом деле, возьмем предел уравнения (8) при $\lambda \to a$ и воспользуемся условием (12). Выражение перед $(\lambda - a)^0$ есть

$$(U_2 + a\gamma)a\gamma\psi(a) = 0,$$

что, поскольку $a \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\psi(a) \neq 0$, означает

$$U_2 = -a\gamma. \tag{14}$$

Как будет видно позже, функция u является решением искомого нелинейного уравнения (1). Поэтому целесообразно выразить потенциалы U_1, W системы (7), (8) через функцию u. Для этого разложим уравнение (7) по степеням параметра $\varepsilon_1 = 1/\lambda$ при $\lambda \to \infty$, а уравнение (8) – по степеням параметра $\varepsilon_2 = \lambda$ при $\lambda \to 0$ и выпишем первые нетривиальные члены этих разложений:

$$\psi_{1t} - u\psi_{1x} + W\psi_1 = 0, \tag{15}$$

$$\psi_{1xx}(0) + a\gamma\psi_{1x}(0) + \Phi_{xx} + a\gamma\Phi_x + U_1a = 0. \tag{16}$$

Проинтегрируем уравнение (14), чтобы выразить из него ψ_1 и подставить в (15). Считая константу интегрирования равной нулю, получим

$$W = \frac{1}{2}(u_x - a\gamma u). \tag{17}$$

Выражение для U_1 получим из уравнения (16) с учетом соотношений (10) (которое определяет $\psi_1(0)$) и (17):

$$U_1 = -\frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}a^2\gamma^2 u + \gamma^2. \tag{18}$$

Теперь линейную систему (7), (8) можно переписать в виде, представленном в [5] при исследовании уравнения (1) ($\Psi = \psi e^{K - a\gamma x/2 + a\gamma\Omega t/2}$):

$$\Psi_t + (\Omega - u)\Psi_x + \frac{1}{2}u_x\Psi = 0, \tag{19}$$

$$\Psi_{xx} - \frac{1}{4}a^2\gamma^2\Psi + \frac{(m-\kappa)}{2\Omega}\Psi = 0, \;\; m = u_{xx} - \Gamma u, \;\; \kappa = 2\gamma^2, \;\; \Gamma = a^2\gamma^2, \tag{20}$$

которое является условием совместности этой системы. Ω здесь играет роль спектрального параметра. При этом a, γ должны быть чисто действительными или чисто мнимыми, поскольку нас интересует уравнение (1) с действительными коэффициентами. Действительные решения этого уравнения соответствуют действительным или чисто мнимым решениям Φ уравнения связи (13). Ниже этот вопрос разбирается на конкретном примере.

Из (20) видно, что $\kappa \neq 0$ в уравнении (1). Однако, как легко заметить, отображение

$$\{t \to t, \; x \to x - \frac{\kappa}{\Gamma}t, \;\; u \to u - \frac{\kappa}{\Gamma}\} \tag{21}$$

аннулирует в (1) член, пропорциональный κ. Поэтому $\bar{\partial}$-проблема поставляет класс решений для уравнения (1) с любым κ. При этом из (21) следует, что убывающим до нуля на бесконечности ($x \to \infty$) решениям уравнения (1) с $\kappa \neq 0$ соответствуют решения уравнения (1) с $\kappa = 0$, стремящиеся на бесконечности к константе.

Явные решения. Рассмотрим простой класс явных решений уравнения (1). Именно, возьмем ядро R_0 уравнения (2) вида

$$R_0(\mu,\lambda) = -\frac{\pi i}{2}(\mu - \lambda)\left(\delta(\lambda - \mu) + \delta(\lambda - a + \mu)\right)\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k}{2b_k - a}\delta(\mu - b_k), \tag{22}$$

где p_k, b_k – действительные константы и $b_k \neq a \neq 0$, $b_k \neq a/2$. В этом случае уравнение (2) решается явно и уравнение (13) для определения функции Φ примет следующий вид:

$$\frac{1}{a} - \sum_{k=1}^{N}\psi(b_k)\exp\left((2b_k - a)\Phi + \gamma t\frac{2b_k - a}{b_k(b_k - a)}\right)\frac{p_k}{b_k} = ce^{-(\Phi + \gamma x)a}, \tag{23}$$

где функции $\psi(b_k)$ удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\psi(b_j) = \frac{1}{b_j} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\psi(b_k)p_k}{a - b_k - b_j}\exp\left((2b_k - a)\Phi + \gamma t\frac{2b_k - a}{b_k(b_k - a)}\right), \;\; j = 1, \ldots, N. \tag{24}$$

В частности, если постоянные b_k кратны $a/2$ ($2b_k = n_k a$, $n_k \in \mathbf{Z}$, $n_k \neq 1$), то уравнения (23), (24) сводятся к полиномиальному уравнению на функцию $\phi = e^{a\Phi}$. Ниже рассмотрены примеры решений уравнения (1), в которых $c = 1$.

Пример 1. Пусть в (22) $N = 1$, $p_1 = \beta$, $b = -a/2$. Тогда полиномиальное уравнение, в которое трансформируется система (23), (24), имеет третью степень:

$$a\phi^3 - \phi^2 a^2 \exp -ax - \frac{9}{2}\beta\phi \exp -\frac{8\gamma}{3a}t + \frac{1}{2}\beta a \exp -ax - \frac{8\gamma}{3a}t = 0, \tag{25}$$

и решения уравнения (1) связаны с решениями уравнения (25) посредством формулы (см. (10))

$$u = \frac{\Phi_t}{\Phi_x} = \frac{\phi_t}{\phi_x} = \frac{8\beta}{3a^3}\frac{9\phi e^{ax} - a}{2\phi^2 e^{8\gamma/(3a)t} - \beta}. \tag{26}$$

Пусть a, γ – действительные константы. В этом случае коэффициенты уравнения (25) действительны и оно имеет действительные решения, каждое из которых порождает действительное решение u уравнения (1). Пусть для определенности $a = \gamma = 1$. Такое решение единственно, если $\beta < 0$:

$$u = -\frac{16}{3}\frac{3e^{-\eta}\left(((\sinh(\eta)\cosh(\eta)^2)^{1/3} + (\sinh(\eta)^2\cosh(\eta))^{1/3}\right) + 1}{12e^{2\eta}\left((\sinh(\eta)\cosh(\eta)^2)^{1/3} + (\sinh(\eta)^2\cosh(\eta))^{1/3} + e^{\eta}/2\right)^2 + 1},$$

$\eta = -1/2x + 2/3t - \alpha$. Здесь $\alpha = \ln\left(\sqrt{3/2\sqrt{6|\beta|}}\right)$, хотя, очевидно, α может принимать произвольное значение, так как его можно убрать сдвигом координаты $x \to x - 2\alpha$, который тривиально отражается на одевающем операторе $K(\lambda)$ в (3) и не затрагивает уравнение (1). Заметим, что при $\eta \to 0$ решение $u \to -4/3 + 4\eta^{2/3}$ и производная решения по η имеет *степенную особенность*: $\partial_\eta u \sim 1/\eta^{1/3}$. В этом заключается принципиальное отличие построенного решения от найденных в [5] пиконов, производная которых имеет *конечный скачок* в некоторой точке. Решение u имеет экспоненциально спадающие ассимптотики: $u \to -(8/9)^2 \exp(-4|\eta|)$ при $|\eta| \to \infty$.

Если $\beta > 0$, то мы имеем три различных действительных решения u_1, u_2, u_3:

$$u_1 = \frac{16}{3}\frac{3e^{-\eta}\sqrt{2\cosh(2\eta)}\cos(\theta/3) + 1}{12e^{2\eta}\left(\sqrt{2\cosh(2\eta)}\cos(\theta/3) + e^{\eta}/2\right)^2 - 1}, \ \theta = \arctan(e^{-2\eta}), \tag{27}$$

$$u_{2,3} = \frac{8}{3}\frac{2 - 3e^{-\eta}\sqrt{2\cosh(2\eta)}\left(\cos(\theta/3) \mp \sqrt{3}\sin(\theta/3)\right)}{3e^{2\eta}\left(\sqrt{2\cosh(2\eta)}(\cos(\theta/3) \mp \sqrt{3}\sin(\theta/3) - e^{\eta}\right)^2 - 1}, \tag{28}$$

которые растут пропорционально $\exp(2|\eta|)$ при $\eta \to -\infty$ (u_1), при $\eta \to \infty$ (u_2, знак "$-$" в уравнении (28)) и при $|\eta| \to \infty$ (u_3).

Во всех интегрируемых моделях, обслуживаемых с помощью $\bar\partial$-проблемы с одевающим оператором K, линейным по независимым переменным, ядру вида (22) соответствуют солитонные решения, параметризованные константами b_k. Здесь же выбор этих констант определяет вид алгебраического уравнения, из которого нужно найти функцию Φ. Поэтому они всегда фиксированы. Этим объясняется отсутствие во всех приведенных выше решениях каких-либо параметров (кроме несущественного параметра α). Параметры a, γ в формулах (22) – (26) нельзя считать свободными, так как они фиксируют коэффициенты уравнения (1) (в данном случае $\kappa = 2$, $\Gamma = 1$).

Пример 2. Пусть $N = 1$, $p_1 = \beta$, $b = 2a$, $a = \gamma = 1$. Тогда вместо (24) имеем уравнение четвертой степени:

$$\beta\left(\phi^4 - 4\phi^3 e^{-x}\right) + 12\phi e^{-3t/2} - 12e^{-x-3t/2} = 0,$$

и решение уравнения (1) связано с решениями выписанного уравнения с помощью формулы

$$u = \frac{\Phi_t}{\Phi_x} = \frac{\phi_t}{\phi_x} = -\frac{9}{2}\frac{\phi e^x - 1}{\phi^3\beta e^{3t/2} + 3}.$$

Мы не будем останавливаться на анализе этих решений.

Автор выражает благодарность С.В. Манакову за обсуждение работы и Д.Д. Холму за постановку задачи. Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-01-0525).

---

1. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, Функ.ан. **19**(2), 11 (1985).
2. L.V.Bogdanov and S.V.Manakov, J.Phys.A:Math.Gen. **21**, L537 (1988).
3. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, Функ.ан. **8**(3), 43 (1974).
4. B.Fuchssteiner and A.S.Fokas, Physica **D4**, 47 (1981).
5. R.Camassa and D.D.Holm, Phys. Rev. Lett **71**, 1661 (1993).
6. M.S.Alber, R.Camassa, D.D.Holm, and J.E.Marsden, Lett. Math. Phys. **32**, 137 (1994).
7. A.S.Fokas, Physica **D87**, 145 (1995).
8. A.Degasperis, S.Manakov, and A.Zenchuk, to be published.
9. А.И.Зенчук, Письма в ЖЭТФ **66**, 206 (1997).