Письма в ЖЭТФ, том 42, вып. 2, стр. 54 – 58 *25 июля 1985 г.*

О ЗАТУХАНИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН И УСКОРЕНИИ РЕЗОНАНСНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б.Э.Грибов, Р.З.Сагдеев, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко

Исследуется ускорение захваченных плазменной волной электронов, обусловленное их многократным отражением от фронта волны в поперечном магнитном поле. Найдены условия, при выполнении которых возможно неограниченно большое увеличение энергии захваченных электронов. Рассмотрено обратное влияние такого ускорения на плазменную волну, и вычислен связанный с ним нелинейный декремент затухания.

1. Идея исследуемого в настоящей статье механизма ускорения была предложена одним из авторов [1] и основана на использовании магнитного поля, параллельного фронту ускоряющей волны. Частицы, скорости которых достаточно близки к скорости волны, имеют малый ларморовский радиус и, заворачиваясь магнитным полем, получают возможность многократно отражаться от фронта волны, каждый раз увеличивая свою скорость вдоль фронта v_y. Предельное значение этой скорости связано с тем, что при больших значениях v_y лоренцова сила $\frac{e}{c} v_y H$ превышает отражающую силу электрического поля $-e\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, и частица "переваливает" через потенциальный "горб", прекращая взаимодействие с волной. Именно этот механизм ответствен за возникновение пучков отраженных ионов на фронте квазипоперечных ударных волн, например, ударной волны земной магнитосферы [2]. Этот же механизм ускорения в случае электронов, захваченных полем плазменной волны, является основным каналом нелинейного затухания плазменной волны в поперечном магнитном поле [3]. По существу предложенная в [4] схема ускорения заряженных частиц, захваченных плазменной волной, получившая название серфотрона, является релятивистской модификацией исследованного в [3] механизма ускорения захваченных частиц и связанной с ним диссипации плазменной волны в поперечном магнитном поле. Из-за релятивистского ограничения скорости v_y в случае достаточно слабого магнитного поля лоренцова сила $\frac{e}{c} v_y H$ для релятивистской частицы остается всегда меньше электрической силы $-e\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, и частица, будучи запертой в потенциальной яме, получает возможность неограниченно увеличивать свою энергию.

2. Система уравнений, описывающая взаимодействие электрона с бегущей плазменной волной $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$ в поперечном магнитном поле $H_0 \parallel 0z$, имеет следующий вид:

$$dp'_x / dt' = e\partial\varphi' / \partial x' - \frac{eH'_0}{c} v'_y \ , \tag{1}$$

$$dp'_y / dt' = e\beta_\phi H'_0 + \frac{eH'_0}{c} v'_x \ . \tag{2}$$

Здесь и ниже штрихи используются для обозначения величин, относящихся к системе отсчета волны. В уравнении (2) учтено наличие в этой системе отсчета электрического поля, параллельного волнозому фронту $E'_y = -\beta_\phi H'_0$, $\beta_\phi = \frac{\omega}{kc}$. Для частицы, захваченной полем волны достаточно малой амплитуды, $v'_x \ll \frac{\omega}{k}$, и из уравнения (2) следует примерно линейный закон роста компоненты импульса вдоль фронта p_y со временем [3]. Учитывая также малые $\sim \frac{v'_x}{c}$ и переходя в лабораторную систему отсчета, можно записать следующее уравнение для $v_y(t)$:

$$v_y(t) = \frac{\omega_{\text{н}} \beta_\phi t \sqrt{1-\beta_\phi^2}}{\sqrt{1+\omega_{\text{н}}^2 \beta_\phi^2 t^2}} \left[1 - \beta_\phi \frac{v'_x}{c} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\beta_\phi^2}{1+\beta_\phi^2 \omega_{\text{н}}^2 t^2} \frac{1}{\beta_\phi t} \int_0^t \frac{v'_x}{c} dt \right] , \tag{3}$$

где $\omega_{\text{н}} = \frac{eH_0}{mc}$ – нерелятивистская циклотронная частота. Наряду с ускорением вдоль волнового фронта частица совершает фазовые колебания относительно захватившей ее волны, для анализа которых удобно воспользоваться интегралом энергии исходных уравнений (1), (2):

$$mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_x}{c^2} - \frac{v'^2_y}{c^2}}} - 1 \right] - e\varphi'(x') -$$

$$-\frac{e\,\beta_\phi}{\sqrt{1-\beta_\phi^2}}\,H_0\int_0^t v_y\,dt = \mathcal{E}\,. \qquad (4)$$

Будем предполагать выполненными условия

$$e\varphi' \ll m c^2\,, \qquad \omega_{\text{н}}\,\tau_0 \ll 1 \qquad (5)$$

$\tau_0 \sim \dfrac{1}{k' v_x'}$ – период фазовых колебаний захваченной частицы. Тогда из (4) с учетом (3) можно получить следующие уравнения для точек поворота захваченной частицы $x_\pm'$, в которых $v_x' = 0$:

$$\mathcal{E} + e\varphi'(x_\pm') = \frac{e H_0}{c}\Bigg[v_y(t)(x_\pm'(t) - x'(0)) +$$

$$+\beta_\phi^2\sqrt{1-\beta_\phi^2}\int_0^t v_y(t)\left[\frac{1}{1-\beta_\phi^2} - \frac{3}{(1+\omega_{\text{н}}^2\beta_\phi^2 t^2)^2}\right]v_x'\,dt\Bigg]\,. \qquad (6)$$

Из этого уравнения следует, что магнитное поле увеличивает эффективную энергию фазовых колебаний при движении частицы к левой точке поворота x_-' и уменьшает при движении ее в обратном направлении, т.е. к x_+', перемещая налево траекторию частицы. Из интеграла энергии (4) и условия сохранения продольного адиабатического инварианта следует, что для релятивистской частицы амплитуда фазовых колебаний $\Delta x'$ не меняется со временем, а частота $v_x' / \Delta x'$ убывает как $1/t$. Соответственно этому можно приближенно представить закон изменения со временем точек поворота в виде:

$$x_\pm' = \pm x_0' - \xi(t)\,, \qquad (7)$$

где $\pm x_0'$ – точки поворота в отсутствии магнитного поля, связанные с энергией частицы соотношением $\mathcal{E} = -e\varphi_0' \cos k x_0$, а уравнение для $\xi(t)$, получаемое из (6) с учетом последнего из условий (5), имеет следующий вид:

$$\frac{E_0}{H_0}\,\frac{\sin k x_0\,\sin k'\xi}{k x_0} = \frac{\beta_\phi\,\omega_{\text{н}}\,t}{\sqrt{(1-\beta_\phi^2)(1+\beta_\phi^2\omega_{\text{н}}^2 t^2)}}\times$$

$$\times\left[1 - 3\beta_\phi^2(1-\beta_\phi^2)(1+\beta_\phi^2\omega_{\text{н}}^2 t^2)^{-1}\right]. \qquad (8)$$

В нерелятивистском пределе $E_0/H_0 \ll 1$, $\beta_\phi \ll 1$ это уравнение совпадает с полученным в [3].

Для того, чтобы частица с начальными точками поворота $k x_0 < \dfrac{\pi}{2}$ осталась в яме при $t \to \infty$ необходимо выполнение условия

$$\frac{E_0}{H_0}\,\frac{\sin k x_0}{k x_0} > \frac{1}{\sqrt{1-\beta_\phi^2}} \qquad (9)$$

(при этом, как следует из (6), всегда будет $k'\xi < \dfrac{\pi}{2}$). Для частицы с $k x_0 > \dfrac{\pi}{2}$ в момент выхода из ямы $\xi = \dfrac{\pi}{k'} - x_0'$, и условие запирания частицы приобретает вид

$$\frac{E_0}{H_0}\,\frac{\sin^2 k x_0}{k x_0} > \frac{1}{\sqrt{1-\beta_\phi^2}}\,. \qquad (10)$$

Вследствие приближенного характера аналитического решения, область применимости которого ограничена условиями (5) [1], представляет интерес численное интегрирование исходной системы уравнений (1), (2). Результаты интегрирования при различных значениях параметров E_0/H_0, $\kappa = (ck)/\omega_{\text{н}}$ и β_ϕ представлены на рис. 1 – 3. На рис. 1 показана характерная траектория частицы, вовлекаемой в процесс неограниченного ускорения. Магнитное поле смещает налево обе точки поворота запертой частицы, и частица сколь угодно долго остается в потенциальной яме, осциллируя с примерно постоянной амплитудой и частотой убывающей со временем. Такой неограниченный захват частиц волной возможен при достаточно больших значениях параметра $E_0/H_0 > [E_0/H_0]_{\text{пор}}$. Зависимость $[E_0/H_0]_{\text{пор}}$ от kx_0, полученная в численном моделировании при $\kappa = 5$, приведена на рис. 2. Пунктиром на этом рисунке показана аналитическая зависимость, следующая из соотношений (9), (10).

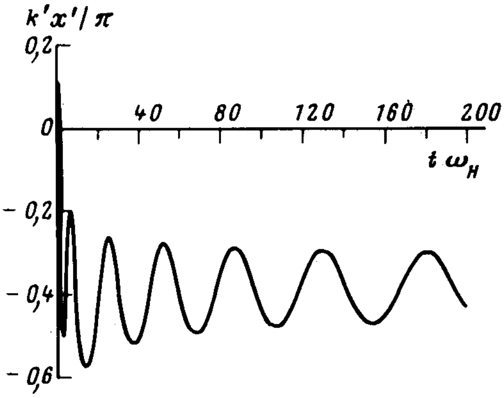

Рис. 1

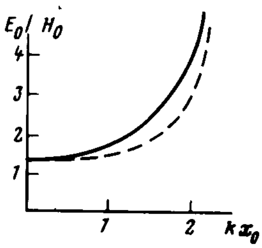

Рис. 2

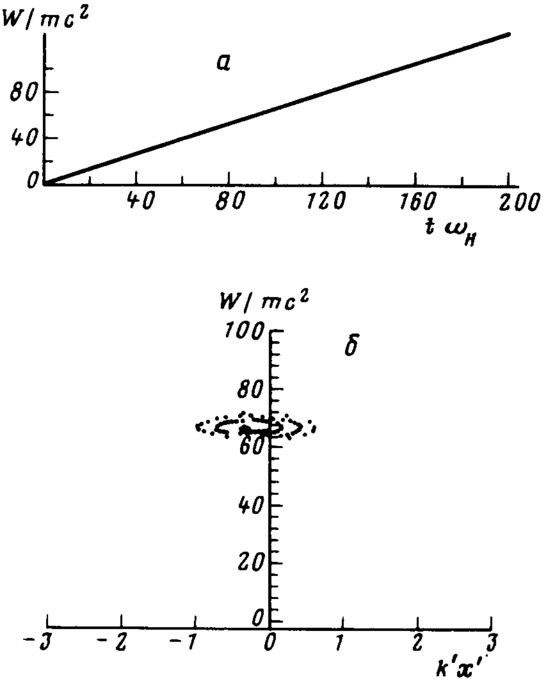

Рис. 3

Рис. 1. Характерная траектория $k'x'(t)$ фазовых колебаний ускоряемого электрона, полученная при $E_0/H_0 = 1{,}3$. На рис. 1 - 3 $\kappa = 5$, $\beta_\phi = 0{,}4$

Рис. 2. Зависимость $[E_0/H_0]_{\text{пор}}$ от kx_0. Область значений E_0/H_0 выше порогового соответствует захвату электрона в процесс неограниченного ускорения. Сплошная линия – результат численного моделирования, пунктир – аналитическая зависимость, следующая из уравнений (9), (10)

Рис. 3. *а* – зависимость от времени энергии ускоряемой частицы при $E_0/H_0 = 1{,}3$, $kx_0 = 0{,}45$; *б* – зависимость энергии частицы W от ее фазы $k'x'$ при $\omega_{\text{н}} t = 100$, $E_0/H_0 = 4{,}0$

---

[1] Заметим, что при выполнении условий (5) параметр $E_0/H_0 = \dfrac{e\varphi'}{mc^2}\,\dfrac{k'c}{\omega_{\text{н}}}$, характеризующий возможность захвата частиц в процессе неограниченного ускорения, может быть достаточно большим.

Частицы, попавшие в область неограниченно долгого захвата, образуют ускоренный сгусток, энергия этих частиц растет со временем согласно уравнению

$$W = m c^2 \left[\frac{1 + \beta_\phi^2 \omega_\text{н}^2 t^2}{1 - \beta_\text{н}^2} \right]^{1/2} . \qquad (11)$$

Такой рост со временем соответствует первому слагаемому в формуле (3) для $v_y(t)$. Остальные слагаемые приводят к малому энергетическому разбросу в ускоренном сгустке, относительная амплитуда которого $\Delta W / W \sim v_x' / c$ к тому же убывает со временем как $1/t$.

Полученная численно зависимость $W(t)$ близка к линейной (см. рис. 3). На этом рисунке показан также спектр энергий сгустка захваченных частиц при $\omega_\text{н} t = 100$. Область фаз ускоряемых частиц изменяется в пределах $-\pi/3 < k' x' < \pi/6$, разброс по энергиям таких частиц $\Delta W / W$ не превышает 4%. Приведенные результаты свидетельствуют о высокой эффективности рассмотренной схемы ускорения.

Исследованный нами механизм ускорения захваченных волной электронов является основной причиной нелинейного затухания плазменной волны в достаточно слабом поперечном магнитном поле. Если пренебречь выходом резонансных частиц из потенциальной ямы, что согласно (9), (10) справедливо при $E_0/H_0 >> 1$, то закон затухания амплитуды плазменной волны, получаемый из условия сохранения энергии в системе волна – резонансные частицы, носит взрывной характер

$$E_0(t) = E_0(0) \left[1 - \frac{t^2}{t_0^2} \right]^{2/3}, \quad t_0^2 = \frac{\pi}{3} \frac{\Omega_0^3}{\gamma_L \omega^2 \omega_\text{н}^2} \frac{v_\phi^2}{v_\text{т}^2 \sqrt{1 - \beta_\phi^2}} . \qquad (12)$$

Здесь обозначено $\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{e E(0) k}{m}}$ – нерелятивистская "баунс частота" $v_\text{т}$ – тепловая скорость, $\gamma_L = \sqrt{\dfrac{\pi}{8}}\, \omega \dfrac{v_\phi^3}{v_\text{т}^3} \exp\left[- \dfrac{m c^2}{T} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta_\phi^2}} - 1 \right) \right]$ – декремент затухания Ландау для плазменной волны с $\beta_\phi \sim 1$ (см. [5]). При получении этой формулы для простоты предложено, что $\beta_\phi \omega_\text{н} t_0 << 1$. Из формулы (11) следует, что при выполнении условия

$$\Omega_0^{3/2} \gamma_L^{1/2} >> \omega_\text{н} k v_\text{т} (1 - \beta_\phi^2)^{1/4}$$

время затухания волны $t << \gamma_L^{-1}$, т.е. затухание волны является даже более быстрым, чем линейное затухание в отсутствие магнитного поля.

Литература

1. *Сагдеев Р.З.* Вопросы теории плазмы, М.: Атомиздат, 1964, 4, 20.
2. *Kennel C.F., Edmiston P., Hada T.* A quartery century of collisionless shock research. Preprint PPG-822, 1984.
3. *Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д.* Письма в ЖЭТФ, 1973, 17, 389.
4. *Dawson J.M.* Proceedings of Int. Conf. on plasma physics, Lausanne, 1984, v. II, invited papers, A837.
5. *Рухадзе А.А., Силин В.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Физматгиз, 1960.

Институт космических исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 июня 1985 г.