

## ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЕ ОПИСАНИЕ МУЛЬТИКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ ПОРЯДКА

В.В.Прудников<sup>1)</sup>, П.В.Прудников, А.А.Федоренко

Омский государственный университет  
644077 Омск, Россия

Поступила в редакцию 21 октября 1998 г.

Проведено теоретико-полевое описание фазовых превращений в сложных системах с двумя взаимодействующими параметрами порядка. Непосредственно для трехмерных систем в двухпетлевом приближении проведен ренорм-групповой анализ скейлинговых функций, выделены фиксированные точки, соответствующие устойчивому бикритическому и тетракритическому поведению. Проведен расчет значений критических индексов в мультикритических точках в двухпетлевом приближении с применением техники суммирования Паде – Бореля.

PACS: 64.60.-i

Существует широкий класс систем, в которых наблюдаемый фазовый переход не может быть описан одним параметром порядка, преобразующимся по одному неприводимому представлению. Особенно много таких примеров в магнитных кристаллах, когда магнитная структура описывается двумя и более неприводимыми представлениями (антиферромагнетики  $\text{Cr}_2\text{TeO}_6$ ,  $\text{KCuF}_3$ ,  $\text{GdAlO}_3$ ,  $\text{MnF}_2$  и другие). Структурные фазовые переходы, которые требуют для описания несколько параметров порядка, обнаружены в  $\text{KMnF}_3$ , боритах и других веществах. Фазовые диаграммы подобных систем имеют особую мультикритическую точку, носящую бикритический или тетракритический характер [1, 2]. В первом случае в ней пересекаются две линии фазовых переходов II рода и одна линия фазового перехода I рода, во втором – четыре линии фазовых переходов II рода. В непосредственной окрестности мультикритической точки система демонстрирует специфическое критическое поведение, характеризующееся конкуренцией типов упорядочения. При этом, если реализуется бикритическое поведение, в системе происходит вытеснение одного параметра порядка другим, в то время как тетракритическое поведение допускает существование смешанной фазы с сосуществующими обоими типами упорядочения.

Модельный гамильтониан системы с двумя связанными параметрами порядка  $\phi$  и  $\psi$ , принадлежащими двум различным неприводимым представлениям размерности  $n$  и  $m$ , имеет вид

$$H_0 = \int d^d X \left( \frac{1}{2} [r_1 \phi^2 + r_2 \psi^2 + (\nabla \phi)^2 + (\nabla \psi)^2] + \frac{u_{10}}{4!} (\phi^2)^2 + \frac{u_{20}}{4!} (\psi^2)^2 + \frac{2u_{30}}{4!} \phi^2 \psi^2 \right), \quad (1)$$

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^n \phi_i^2, \quad \psi^2 = \sum_{i=1}^m \psi_i^2, \quad (\nabla \phi)^2 = \sum_{i=1}^n (\nabla \phi_i)^2, \quad (\nabla \psi)^2 = \sum_{i=1}^m (\nabla \psi_i)^2.$$

Анализ проблемы фазового перехода в такой системе был проведен в работах [3] и (независимо) в [4]. Рассматриваемая модель была исследована с помощью техники ренорм-группы Вильсона в рамках метода  $\epsilon$ -разложения в однопетлевом приближении. При этом в работе [3] была предпринята попытка проследить зависимость

<sup>1)</sup> e-mail: prudnikov@univer.omsk.su

характера мультикритического поведения от чисел  $n$  и  $m$ . Однако многочисленные исследования систем, характеризующихся одним параметром порядка, проведенные за последние годы, указывают на возможное сильное отличие предсказаний однопетлевого приближения, тем более в рамках  $\epsilon$ -разложения, от реального критического поведения. Для выяснения этого вопроса в отношении мультикритических явлений и с целью уточнить зависимость характера мультикритического поведения от структуры параметров порядка нами было проведено теоретико-полевое описание системы (ур-ие (1)) в рамках двухпетлевого приближения. При этом мы использовали массовую теорию [5], позволяющую описывать непосредственно трехмерные системы, без использования  $\epsilon$ -разложения, где  $\epsilon = 4 - d$  ( $d$  – размерность системы). Исследования критических явлений показывают [6], что такой подход наиболее адекватно описывает критическое поведение и его применение совместно с методами суммирования асимптотически сходящихся рядов позволяет достигать высокой точности результатов.

Как известно, в рамках теоретико-полевого подхода [7] асимптотическое критическое поведение и структура фазовых диаграмм во флуктуационной области определяются ренорм-групповым уравнением Каллана – Симанчика для вершинных частей неприводимых функций Грина. Для вычисления  $\beta$ -функций и критических индексов как функций перенормированных вершин взаимодействия  $u_1, u_2$  и  $u_3$  (скейлинговых функций), входящих в ренорм-групповое уравнение, мы применили стандартный метод, основанный на диаграммной технике Фейнмана и процедуре перенормировки [6]. В результате в рамках двухпетлевого приближения мы получили следующие выражения для  $\beta$ -функций:

$$\begin{aligned}\beta_1(u_1, u_2, u_3) &= -u_1 + \frac{(n+8)}{6}u_1^2 + \frac{m}{6}u_3^2 - \frac{(41n+190)}{243}u_1^3 - \frac{2m}{27}u_3^3 - \frac{23m}{243}u_1u_3^2, \\ \beta_2(u_1, u_2, u_3) &= -u_2 + \frac{(m+8)}{6}u_2^2 + \frac{n}{6}u_3^2 - \frac{(41m+190)}{243}u_2^3 - \frac{2n}{27}u_3^3 - \frac{23n}{243}u_2u_3^2, \\ \beta_3(u_1, u_2, u_3) &= -u_3 + \frac{2}{3}u_3^2 + \frac{(n+2)}{6}u_1u_3 + \frac{(m+2)}{6}u_2u_3 - \frac{5n+5m+72}{486}u_3^3 - \\ &\quad - \frac{23(n+2)}{486}u_1^2u_3 - \frac{23(m+2)}{486}u_2^2u_3 - \frac{(n+2)}{9}u_1u_3^2 - \frac{(m+2)}{9}u_2u_3^2,\end{aligned}\quad (2)$$

и для скейлинговых функций  $\eta$  и  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\eta_1(u_1, u_2, u_3) &= \frac{2}{243}((n+2)u_1^2 + mu_3^2), \quad \eta_2(u_1, u_2, u_3) = \frac{2}{243}((m+2)u_2^2 + nu_3^2); \quad (3) \\ \gamma_\phi^2(u_1, u_2, u_3) &= \frac{n+2}{6}u_1 + \frac{m}{6}u_3 - \frac{n+2}{18}u_1^2 - \frac{m(n-m+2)}{36}u_3^2 + \frac{m(n+2)}{36}u_1u_3 - \\ &\quad - \frac{m(m+2)}{36}u_2u_3, \\ \gamma_\psi^2(u_1, u_2, u_3) &= \frac{m+2}{6}u_2 + \frac{n}{6}u_3 - \frac{m+2}{18}u_2^2 - \frac{n(m-n+2)}{36}u_3^2 + \frac{n(m+2)}{36}u_2u_3 - \\ &\quad - \frac{n(n+2)}{36}u_1u_3.\end{aligned}\quad (4)$$

Известно, что ряды теории возмущений являются асимптотически сходящимися, а вершины взаимодействия флуктуаций параметров порядка во флуктуационной области  $\tau_1 = \tau_2 \rightarrow 0$  достаточно велики, чтобы можно было непосредственно применять

выражения (2)–(4). Поэтому с целью извлечения из полученных выражений нужной физической информации мы применили обобщенный метод Паде–Бореля, используемый для суммирования асимптотически сходящихся рядов. При этом прямое и обратное преобразования Бореля, обобщенные на многопараметрический случай и сохраняющие симметрию системы, имеют вид

$$f(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i,j,k} c_{ijk} u_1^i u_2^j u_3^k = \int_0^\infty e^{-t} F(u_1 t, u_2 t, u_3 t) dt,$$

$$F(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i,j,k} \frac{c_{ijk}}{(i+j+k)!} u_1^i u_2^j u_3^k. \quad (5)$$

Для аналитического продолжения борелевского образа функции вводится ряд по вспомогательной переменной  $\lambda$ :

$$\tilde{F}(u_1, u_2, u_3, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \frac{c_{i,j,k-k-i-j}}{k!} u_1^i u_2^j u_3^{k-i-j}, \quad (6)$$

к которому применяется аппроксимация Паде  $[L/M]$  в точке  $\lambda = 1$ . В двухпетлевом приближении для вычисления  $\beta$ -функций мы использовали аппроксимант  $[2/1]$ . Природа мультикритического поведения определяется существованием устойчивой фиксированной точки, удовлетворяющей системе уравнений

$$\beta_k(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Значения фиксированных точек, полученные в результате решения системы (7), для наиболее интересных значений числа компонент  $n$  и  $m$  параметров порядка приведены в табл.1. Требование устойчивости фиксированной точки сводится к условию, чтобы собственные значения  $b_1, b_2, b_3$  (см. табл.1) матрицы

$$B_{ij} = \frac{\partial \beta_i(u_1^*, u_2^*, u_3^*)}{\partial u_j} \quad (8)$$

лежали в правой комплексной полуплоскости.

В работе [3] было найдено три типа устойчивых фиксированных точек, соответствующих различным значениям  $n$  и  $m$ , области существования которых на плоскости  $(n, m)$  в однопетлевом приближении показаны на рис.1а. Тип 1 соответствует изотропной фиксированной точке, в которой  $u_1^* = u_2^* = u_3^*$  и гамильтониан (1) эффективно совпадает с гамильтонианом системы с одним  $n + m$ -компонентным параметром порядка с полной симметрией  $SO(n + m)$  более высокой, чем симметрия  $SO(n) \times SO(m)$  исходной системы (проявление флуктуационно обусловленной асимптотической симметрии в мультикритической точке). Для точек типа 2 все три значения  $u_i^*$  отличны от нуля и могут не совпадать. Им соответствует самая низкая симметрия исходного гамильтониана  $SO(n) \times SO(m)$ . Точкам типа 3 соответствуют развязанные параметры порядка, так как в них  $u_3^* = 0$ . При этом им отвечает также более высокая симметрия  $SO(n) \oplus SO(m)$ . На рис.1б изображены области существования различных типов фиксированных точек, полученные нами в двухпетлевом приближении без использования  $\epsilon$ -разложения. Граница области устойчивости изотропной фиксированной точки проходит теперь по прямой  $n + m = 2.9088$ , то есть

наивысшей асимптотической симметрией системы является  $SO(2)$ , а область существования точек типа 2 стала такой узкой, что в ней лежит только 5 физически интересных точек. Существенное изменение картины говорит о слабом соответствии однопетлевого приближения реальному мультикритическому поведению.

Таблица 1

Значения фиксированных точек и собственных значений

$n$	$m$	$u_1^*$	$u_2^*$	$u_3^*$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
1	1	0.93498196	0.93498196	0.93498196	0.090410	0.523089	0.667315
		1.06446157	1.06446157	0.00000000	0.653550	-0.169273	0.653550
		0.53223078	0.53223078	1.59669235	-0.205852	0.008999	0.653550
1	2	0.87048304	0.84551387	0.76415961	0.505216	0.681095	0.007546
		1.06446157	0.93498196	0.00000000	0.653550	-0.085636	0.667315
		0.82961991	0.82961991	0.82961991	-0.008388	0.474448	0.681378
1	3	1.05549842	0.82655711	0.13586107	0.016030	0.681066	0.649077
		1.06446157	0.82961991	0.00000000	0.653550	-0.019503	0.681379
		0.74314276	0.74314276	0.74314276	-0.093023	0.432386	0.695090
1	4	1.06446157	0.74314276	0.00000000	0.653550	0.695090	0.033451
		0.67140562	0.67140562	0.67140562	-0.165868	0.396007	0.708159
1	5	1.06446157	0.67140562	0.00000000	0.653550	0.076394	0.708159
		0.61123804	0.61123804	0.61123804	-0.228952	0.364435	0.720466
		0.96224764	0.65141432	-0.32221693	0.589565	-0.109812	0.728987
2	2	0.93494419	0.93494419	0.01059832	0.667270	0.667335	0.001647
		0.93498195	0.93498195	0.00000000	0.667315	-0.001673	0.667315
		0.74314276	0.74314276	0.74314276	-0.093023	0.432386	0.695090
2	3	0.93498195	0.82961991	0.00000000	0.667315	0.064781	0.681379
		0.67140562	0.67140562	0.67140562	-0.165868	0.396007	0.708159
2	4	0.93498195	0.74314276	0.00000000	0.667315	0.118008	0.695090
		0.61123804	0.61123804	0.61123804	-0.228952	0.364435	0.720466
		0.81776815	0.68640603	-0.37358192	0.555319	-0.212087	0.755115
3	3	0.82961991	0.82961991	0.00000000	0.681379	0.681379	0.131538
		0.73717819	0.73717819	-0.38320676	-0.208150	0.766734	0.545585
		0.61123804	0.61123804	0.61123804	-0.228952	0.720466	0.364435

Фазовые диаграммы для гамильтониана (1) в приближении среднего поля (без учета флуктуаций) хорошо известны [3, 8]. Так, в случае  $u_3^2 < u_1 u_2$  реализуется тетракритическая точка, и, следовательно, возможно существование смешанной фазы с  $\phi \neq 0$  и  $\psi \neq 0$ . В противоположном случае, с  $u_3^2 \geq u_1 u_2$ , фазовая диаграмма имеет бикритическую точку и смешанная фаза не возникает. Однако учет флуктуаций, как было показано в [3], может существенно изменить характер фазовой диаграммы в критической области. Для этого должен быть исследован фазовый портрет системы на основании решения системы уравнений ( $r = r_1 = r_2$ )

$$r \frac{\partial u_k}{\partial r} = \beta_k(u_1^*, u_2^*, u_3^*), \quad (9)$$

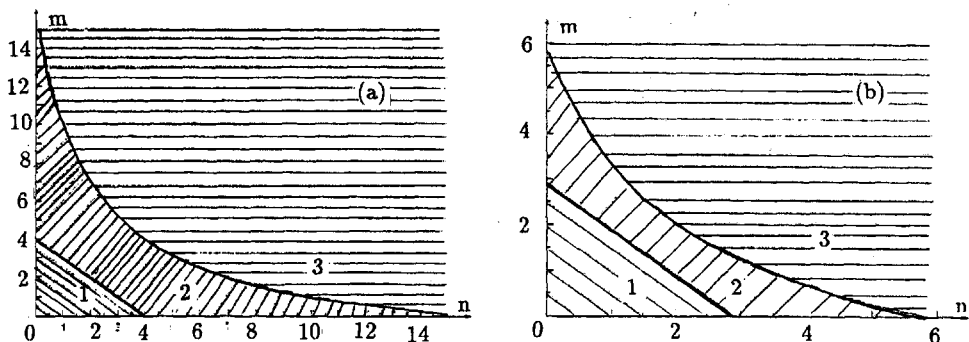


Рис.1. Области устойчивости фиксированных точек, определенные: а) в [3,4] в первом порядке  $\epsilon$ -разложения; б) в настоящей работе в рамках теоретико-полевого подхода в двухпетлевом приближении при  $d = 3$

задающей фазовые траектории в пространстве вершин  $u_k$ . При  $\tau \rightarrow 0$  в зависимости от затравочных значений вершин  $u_k^{(0)}$  фазовые траектории или покидают область устойчивости гамильтониана (1) с реализацией фазового перехода I рода, или приходят в устойчивую фиксированную точку из набора рассмотренных выше с определенной симметрией системы. В своем движении фазовые траектории могут пересекать области, в которых для вершин выполняется условие тетра- или бикритичности. В результате на фазовых диаграммах, соответствующих теории среднего поля, в критической области появляются включения кривых фазовых переходов I рода и набор бикритических точек [3].

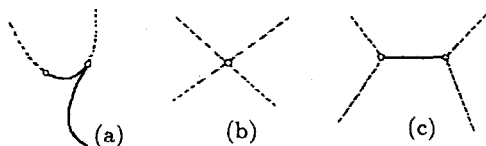


Рис.2. Возможные типы фазовых диаграмм. Сплошные линии соответствуют кривым фазовых переходов I рода, штриховые – переходам II рода

Проведенное в данной статье уточнение значений и типа стабильных фиксированных точек не вызывает существенного изменения в анализе фазового портрета и фазовых диаграмм, проведенном в [3] для случая  $n = m = 1$ . Однако в случаях с  $n + m > 2.9088$  выявленное существенное изменение значений фиксированных точек и условий их стабильности должно вызвать как заметное изменение фазовых диаграмм в критической области, так и привести к другим видам симметрии системы в мультикритической точке. Как видно из приведенных в табл.1 значений  $u_k^*$ , стабильные фиксированные точки для  $n + m \geq 3$  имеют тетракритический характер, то есть  $u_3^2 < u_1 u_2$ . Поэтому, если затравочные значения вершин удовлетворяют условию бикритичности, то фазовые траектории будут всегда покидать область устойчивости гамильтониана (1) и фазовые диаграммы, имеющие бикритический характер за пределами критической области, будут содержать включения кривых фазовых переходов I рода в критической области (рис.2а). Если же затравочные значения вершин удовлетворяют условию тетракритичности, то для фиксированных точек типа 3 фазовые диаграммы имеют тетракритический характер как за пределами, так и в критической области (рис.2б). Вычисленные значения критических индексов, характеризующих тетракритическое поведение, приведены в табл.2.

Два набора индексов для систем с  $n \neq m$  отражают тот факт, что критическое поведение двух различных параметров порядка может быть выявлено независимо в различных экспериментах. Критическое же поведение теплоемкости системы определяется большим по величине индексом. Для фиксированных точек типа 2 анализ фазового портрета системы показывает, что возможны фазовые диаграммы двух видов: они имеют тетракритический характер за пределами критической области, а в критической области диаграммы первого вида обладают тетракритической точкой (рис.2b), в то время как диаграммы второго вида содержат включения кривой фазового перехода I рода с двумя бикритическими точками (рис.2с).

Таблица 2

Значения критических индексов

$n$	$m$	$i$	$\eta$	$\nu$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	1	-	0.02878	0.67371	-0.02114	0.34655	1.32804
1	2	1	0.02832	0.70402	-0.11206	0.36198	1.38810
		2	0.02834	0.70461	-0.11383	0.36229	1.38925
1	3	1	0.02796	0.66129	0.01613	0.33989	1.30409
		2	0.02827	0.71516	-0.14547	0.36769	1.41010
1	4	1	0.02798	0.63796	0.08613	0.32790	1.25807
		2	0.02727	0.73165	-0.19495	0.37580	1.44335
1	5	1	0.02798	0.63796	0.08613	0.32790	1.25807
		2	0.02597	0.75502	-0.26505	0.38731	1.49042
2	2	-	0.02878	0.67521	-0.02563	0.34732	1.33099
2	3	1	0.02878	0.67371	-0.02114	0.34655	1.32804
		2	0.02832	0.70474	-0.11423	0.36235	1.38953
2	4	1	0.02878	0.67371	-0.02114	0.34655	1.32804
		2	0.02727	0.73165	-0.19495	0.37580	1.44335
3	3	-	0.04532	0.93429	-0.80288	0.48832	1.82625

В заключение мы надеемся, что выявленные особенности мультикритического поведения найдут свое отражение в анализе экспериментальных работ по мультикритическому поведению систем с конкурирующими параметрами порядка.

Исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант #97-02-16124).

1. К.С.Александров, А.Т.Анистратов, Б.В.Безносиков, Н.В.Федосеева, *Фазовые переходы в кристаллах галлоидных соединений ABX<sub>3</sub>*, Новосибирск: Наука, 1981.
2. Y.Shapira, in: *Multicritical phenomena*, Plenum press, London - New York, 1984, p.35.
3. И.Ф.Люксютов, В.Л.Покровский, Д.Е.Хмельницкий, *ЖЭТФ* **69**, 1817 (1975).
4. J.M.Kosterlitz, D.R.Nelson, and M.E.Fisher, *Phys. Rev.* **B13**, 412 (1976).
5. G.Parisi, *J. Stat. Phys.* **23**, 49 (1980).
6. E.Brezin, J.C.Le Guillou, and J.Zinn-Justin, in: *Phase transitions and critical phenomena*, Eds. C.Domb and M.S.Green, Acad. Press, London - New York - San Francisco, 1976, vol.6, p.125.
7. D.Amit, *Field theory the renormalization group and phenomena*, New York, McGraw-Hill, 1976.
8. Ю.А.Изюмов, В.Н.Сыромятников, *Фазовые переходы и симметрия кристаллов*, М.: Наука, 1984.