Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.9, стр.743 - 747 © 1996г. 10 мая

# ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД БЕРЕЗИНСКОГО–КОСТЕРЛИТЦА–ТАУЛЕССА В СИСТЕМАХ С ЭКЗОТИЧЕСКИМИ СИММЕТРИЯМИ

*С.А.Булгадаев*

*Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН*

*117334 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 февраля 1996 г.

После переработки 8 апреля 1996 г.

Рассмотрен фазовый переход Березинского–Костерлитца–Таулесса в системах с исключительными группами симметрии $G = E_{6,7,8}$, $G_2$, $F_2$. Методом ренорм-группы найдены критические индексы и показатели логарифмических поправок к корреляционным функциям в точке перехода. Показано, что для $G = A, D, E$ критические индексы выражаются через числа Кокстера $h_G$ (или значения оператора Казимира в присоединенном представлении $K_2^G$).

PACS: 05.70.Jk, 05.70.Fh

Исключительные группы $G_2$, $F_4$, $E_{6,7,8}$, открытые около ста лет назад на "кончике пера" в работах Киллинга и Картана, долгое время считались экзотическими с точки зрения их применения. Но позднее, благодаря своим уникальным свойствам симметрии и связи с различными алгебрами над числами Кэли (октавами), они стали находить применение во многих областях чистой и прикладной математики. В последнее время исключительные группы находят приложение во многих задачах физики. Наиболее интересные случаи: 1) исключительная роль группы $E_8$ и связанной с ней уникальной четной унимодулярной решетки в построении квантовой безаномальной теории струн и появление группы $E_6$ при компактификации этих струн [1], 2) связь интегрируемых возмущений конформных теорий, описывающих критические точки фазовых переходов второго рода в двумерных моделях, с аффинными теориями Тоды, при этом обычной и трикритической моделям Изинга, возмущенным магнитным полем, соответствуют теории Тоды с группой $E_8$ и $E_7$, соответственно, а трикритической $Z_3$ модели Поттса в магнитном поле – теория Тоды с группой $E_6$ [2].

В предлагаемой статье будет рассмотрен фазовый переход Березинского–Костерлитца–Таулесса (БКТ) в системах, описываемых обобщенными (то есть содержащими все корни) теориями Тоды со всеми исключительными группами.

Обычный фазовый переход БКТ [3, 4] происходит в системах с $U(1)$-симметрией, имеющих топологические возбуждения в виде вихрей, взаимодействующих по логарифмическому закону

$$H_2 = -\frac{e_1 e_2}{2\pi} \ln \left| \frac{x_1 - x_2}{a} \right| ,$$

где $e_{1,2} = \pm 1$ – топологический заряд вихря. Таким образом, это фазовый переход в двумерном кулоновском газе, описываемом статистической суммой

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\mu^{2N}}{N!} \int \prod_{i=1}^{N} d^2 x_i \sum_{\{e_i\}} {}' e^{-\beta H_N} ,$$

где $\sum'_{\{e_i\}}$ означает суммирование по всем нейтральным конфигурациям зарядов $\sum\limits_{i=1}^{N} e_i = 0$,

$$H_N = -\sum_{i<j}^{N} e_i e_j \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right| ,$$

$\mu^2 = ga^{-2}$, $g$ – химическая активность, $a$ – постоянная решетки или другой обрезающий параметр на малых расстояниях.

Статсумма $Z$ имеет эквивалентное представление в виде теории поля с $S_{eff}$ [3, 4]:

$$Z = \int D\varphi \exp(-S_{eff}[\varphi]), \quad S_{eff}[\varphi] = S_{SG} = \int d^2x \left[ \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu \varphi)^2 - \mu^2 V(\varphi) \right] ,$$

$$V(\varphi) = \sum_{e=\pm 1} e^{ie\varphi} = 2\cos\varphi .$$

Фазовый переход (ФП) БКТ характеризуется тем, что при понижении температуры $1/\beta$ газ вихрей переходит из "плазменной" фазы с конечным корреляционным радиусом $\xi$ (радиусом экранирования) в "диэлектрическую" фазу с бесконечным $\xi$, при этом при приближении к критической температуре $1/\beta^* = e^2/8\pi$ $\xi \to \infty$ по закону

$$\xi \sim \exp(K\tau^{-\nu}), \quad \tau = \frac{T - T^*}{T^*}, \quad \nu = 1/2 ,$$

где $K$ - константа $0(1)$.

В системах с симметрией, описываемой простой компактной группой $G$ или ее максимальной абелевой подгруппой $T_G$, возможны вихри с изовекторными зарядами $\mathrm{e}_a$, принадлежащими $n$-мерной решетке ($n$ – ранг группы $G$), связанной с решеткой дуальных корней группы $G$ [5]. Эти вихри тоже взаимодействуют по логарифмическому закону и поэтому в таких системах тоже может происходить ФП БКТ. Так как характеристики ФП (критические индексы и т.д.) зависят только от геометрии зарядов с минимальной нормой $|\mathrm{e}_a|$, то эквивалентная эффективная теория поля для таких систем имеет вид [6]

$$Z = \int D\vec{\varphi} \exp(-S_{eff}[\vec{\varphi}]), \quad S_{eff}[\vec{\varphi}] = \int d^2x \left[ \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu \vec{\varphi})^2 - \mu^2 V(\vec{\varphi}) \right] ,$$

$$V(\vec{\varphi}) = \sum_{\{a\}} \exp(i(\mathrm{e}_a \vec{\varphi})), \quad \vec{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_n) , \tag{1}$$

где $\sum_{\{\mathrm{e}_a\}}$ идет только по $\{\mathrm{e}_a\}$ с минимальным $|\mathrm{e}_a|$ и $\sum\limits_{\{a\}} \mathrm{e}_a = 0$ (условие нейтральности).

Для простых односвязных групп $G$ с простыми связями (серии $A, E$) $\{\mathrm{e}_a\}$ совпадает с системой корней $\{\mathrm{r}_a\}$ алгебр Ли этих $G$. В этом случае $V(\vec{\varphi})$ является характером присоединенного представления группы $G$. Это дает другую, теоретико-групповую интерпретацию возможных $V(\vec{\varphi})$, которые теперь могут быть связаны с разложением $G$-инвариантных $V(\vec{\varphi})$ по характерам группы $G$ [7]. Здесь будет рассмотрен ФП в системах с "экзотическими" группами симметрий $G = E_{6,7,8}$, $G_2$, $F_4$ с $V(\vec{\varphi})$, совпадающими с характерами присоединенных представлений этих групп (системы с классическими группами симметрий $A$, $B$, $C$, $D$ были рассмотрены ранее [6, 7]). Теории (1) с такими $V(\vec{\varphi})$ являются обобщением соответствующих теорий Тоды (простых и аффинных), в которых ФП БКТ невозможен, так как они не удовлетворяют условию нейтральности (кроме случая $G = A_n$ [6]).

Для групп $G_2$ и $F_4$ геометрия множеств минимальных корней $\{\mathbf{r}_a\}$ и минимальных дуальных корней $\{\mathbf{r}_v\}$ совпадает с геометрией систем корней групп $A_2 = SU(3)$ и $D_4 = SO(8)$, соответственно, и, следовательно, все критические индексы для них совпадают: $\nu_{G_2} = \nu_{A_2} = 2/5$, $\nu_{F_4} = \nu_{D_4} = 1/4$. Поэтому для полной классификации возможных типов особенностей остается рассмотреть группы $E_{6,7,8}$. Для нахождения критических индексов используется метод ренорм-группы. Уравнения ренорм-группы имеют вид [6, 7]

$$\frac{dg}{dl} = -2\delta g + B_G g^2, \; \frac{d\delta}{dl} = -C_G g^2 . \tag{2}$$

Здесь $g$ – обезразмеренная $\mu^2$, а $\delta = (\beta r^2 - 8\pi)/8\pi$, $B_G = \pi\theta_G$, $\theta_G$ – кратность воспроизведения $V(\vec{\varphi})$ при ренормировании (1) или число способов, которыми каждый корень может быть представлен в виде суммы двух других корней, $C_G = 2\pi^2 N_G$, где $N_G$ – константа, определяемая из условия

$$\sum_{\{a\}} r_i^a r_k^a = N_G \delta_{ik} .$$

Так как все корни групп серии $E$ имеют одинаковую длину $r^2 = 2$, то $N_G = K_2^G$ – собственному значению оператора Казимира в присоединенном представлении, которое для групп серий $A$, $D$, $E$ может быть выражено через число Кокстера $h_G =$ (число всех корней)/ранг группы $G$

$$K_2^G = 2h_G . \tag{3}$$

Уравнения ренорм-группы (1) имеют две сепаратрисы [6, 7]:

$$u_{1,2} \equiv (g/\delta)_{1,2} = \frac{-1}{2C_G}[B_G \pm (B_G^2 + 8C_G)^{1/2}] , \tag{4}$$

где $u_2$ является линией раздела фаз. Критический индекс $\nu_G$ дается выражением

$$\nu_G = |u_2|[(B_G/C_G)^2 + 8/C_G]^{-1/2} . \tag{5}$$

Вычисление коэффициентов $B_G$, $C_G$ и критических индексов $\nu_G$ начнем с группы $E_6$. Ее система корней $\{\mathbf{r}_a\}$ состоит из 72 векторов в 6-мерном пространстве, которые удобно представить как векторы в 8-мерном пространстве с условием, что $r_6 = r_7 = -r_8$ для всех $\mathbf{r}_a$:

$$\pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j (1 \le i < j \le n), \quad \pm\frac{1}{2}(\mathbf{e}_8 - \mathbf{e}_7 - \mathbf{e}_6 + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{\alpha(i)}\mathbf{e}_i) , \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{5} \alpha(i) = 0 \pmod 2 .$$

Здесь $e_i$ – ортонормированный репер.

Система корней $E_7$ состоит из 126 корней, которые в 8-мерном пространстве ортогональны вектору $e_7 + e_8$:

$$\pm e_i \pm e_j \quad (1 \le i < j \le 6), \quad \pm(e_7 - e_8),$$

$$\pm\frac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6}(-1)^{\alpha(i)}e_i), \quad \sum_{i=1}^{6}\alpha(i) = 1 \pmod 2. \tag{7}$$

Система корней $E_8$ состоит из 240 корней в 8-мерном пространстве:

$$\pm e_i \pm e_j (i < j), \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\alpha(i)}e_i, \quad \sum_{i=1}^{8}\alpha(i) = 0 \pmod 2. \tag{8}$$

Эти системы обладают симметрией относительно дискретной конечной группы Вейля $W_G$, которая действует на корнях транзитивно, то есть переводит каждый корень в любой другой. Поэтому для вычисления $B_G$ достаточно вычислить его для какого-нибудь одного корня. Геометрия этих систем корней такова, что углы между корнями $\gamma_{ab}$ могут принимать только три значения:

$$\gamma = \pi/2, \quad \pi/3, \quad 2\pi/3.$$

Поэтому составить какой-либо корень $\mathbf{r}$ из двух других можно только тогда, когда углы между ними равны $2\pi/3$, а между выбранным корнем $\mathbf{r}$ и его составляющими – $\pi/3$, то есть вклад в $\theta_G$ дают только корни, составляющие с $\mathbf{r}$ угол $\pi/3$. Непосредственным вычислением можно показать, что число таких корней, а следовательно, и $\theta_G$ равно

$$\theta_G = 2(h_G - 2), \tag{9}$$

где

$$h_6 = 12, \quad h_7 = 18, \quad h_8 = 30. \tag{10}$$

Замечательным образом оказывается, что все коэффициенты уравнений ренорм-группы, а потому и все критические характеристики ФП зависят только от числа Кокстера $h_G$ или оператора Казимира $K_2^G$. Подставляя (3), (9) в (4), (5), находим

$$u_{1,2} = -1/2\pi, \quad 1/\pi h_G, \quad \nu_G = 2/(h_G + 2), \tag{11}$$

то есть все радикалы в (4), (5) благополучно разрешаются. Это свойство разрешимости многих квадратичных уравнений на алгебрах Ли связано с их симметрией. Отметим также универсальный, то есть не зависящий от $G$, наклон первой сепаратрисы. Эта сепаратриса имеет важное значение для описания асимптотически свободных теорий поля с $S_{eff}$ (1) [7].

Легко убедиться, что найденные ранее выражения для $N_G$, $\theta_G$, $\nu_G$ и других характеристик ФП в системах с симметрией групп серий $A_n$, $D_n$ [7] тоже могут быть выражены по формулам (3), (9), (11) через соответствующие $h_G$. Таким образом, для всех групп с простыми связями (серии $A$, $D$, $E$) все характеристики ФП БКТ в системах, описываемых $S_{eff}$ (1), выражаются через числа Кокстера $h_G$ или значение оператора Казимира $K_2^G$ в присоединенном представлении.

Теперь мы можем перечислить все возможные критические индексы ФП БКТ:

$$\begin{array}{llllllllll} G = A_n, & B_n, & C_n, & D_n(n \geq 2), & G_2, & F_4, & E_6, & E_7, & E_8, \\ \nu_G = 2/(n+3), & 1/2, & 1/n, & 1/n, & 2/5, & 1/4, & 1/7, & 1/10, & 1/16 \end{array} \qquad (12)$$

Исходному показателю Костерлитца–Таулесса $\nu = 1/2$ соответствуют $\nu_{A_1} = \nu_{D_2} = \nu_{B_n}$. Для $V(\vec{\varphi})$ с системой минимальных дуальных корней $\{\mathbf{r}_v\}$ индексы $\nu_G$ для групп серий $B_n$ и $C_n$ переходят друг в друга, т.к. их корневые системы взаимно дуальны. Тот факт, что $\nu_G$ зависит только от $h_G$, приводит к совпадению $\nu_G$ для некоторых групп, действующих в разных пространствах, что может оказаться важным, когда $V(\varphi)$ составлен из характеров разных представлений разных групп. Наибольшим набором возможных значений $\nu_G$ обладает серия $A_n$, так как кроме индексов вида $1/k$ (где $k$ – целые числа $\geq 2$), она содержит еще индексы вида $2/(2k+1)$.

В низкотемпературной фазе корреляционные функции экспонент равны свободным корреляционным функциям с перенормированным показателем $\bar{\beta}$, зависящим от начального значения $\beta_0$, $\bar{\beta} = \lim_{l \to 0} \beta(l)$ [4, 7]:

$$< \prod_{s=1}^{t} \exp(i(\mathbf{r}_s \vec{\varphi}(x_s))) >= \prod_{i \neq j}^{t} \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right|^{\bar{\beta}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)/2\pi}, \quad \sum_{i=1}^{t} \mathbf{r} = 0. \qquad (13)$$

В точке ФП (где $\bar{\beta} = \beta^* = 8\pi/r^2 = 4\pi$) у них появляется дополнительный логарифмический множитель, связанный с "нуль-зарядным" поведением $g$ и $\delta$ на критической сепаратрисе – линии раздела фаз:

$$\prod_{i \neq j}^{t} \left( \ln \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right| \right)^{\beta^*(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)/2\pi A_G} = \prod_{i \neq j}^{t} \left( \ln \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right| \right)^{h_G \cos(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)}, \qquad (14)$$

где $A_G = 4/h_G$ – коэффициент в уравнениях ренорм-групп для $\delta$ на критической сепаратрисе.

В заключение отметим, что ФП БКТ возможен и в одномерных системах, но там критические индексы оказываются не зависящими от симметрии [8]. Поэтому и для систем с исключительными группами симметрии они будут такими же, как и для классических групп.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96.02.17331-а).

---

1. М.Грин, Дж.Шварц, Е.Виттен, *Теория суперструн*, т.1,2, М.: Наука, 1990. (M.Green, J.H.Schwarz, and E.Witten, *Superstring theory*, v.1,2, Cambridge 1988).
2. A.B.Zamolodchikov, *Rutherford - Appleton preprint* 89-001 (1989); T.Eguchi and S.K.Yang, Phys. Lett. **224**, 373 (1989); T.J.Hollowood and P.Mansfield, Phys. Lett. **226**, 73 (1989).
3. В.Л.Березинский, ЖЭТФ **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
4. J.M.Kosterlitz and D.J.Thouless, J. Phys. **C6**, 118 (1973), J.M.Kosterlitz, J. Phys. **C7**, 1046 (1974).
5. С.А.Булгадаев, Письма в ЖЭТФ, в печати.
6. С.А.Булгадаев, Теорет. матем. физика **49**, 77 (1981).
7. S.A.Bulgadaev, Nucl. Phys. **B224**, 349 (1983).
8. С.А.Булгадаев, Теорет. матем. физика **51**, 424 (1982).