Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.10, стр.758 - 762

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ С ИЗОВЕКТОРНЫМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ЗАРЯДАМИ

С.А.Булгадаев

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 февраля 1996 г.
После переработки 25 апреля 1996 г.

Показано, что в вырожденных системах с параметром порядка ψ, принимающим значения в компактных однородных пространствах T_G или G/T_G (где G - простая компактная группа, а T_G - ее максимальная коммутативная подгруппа), имеется богатый набор топологических возбуждений (вихри или соответственно инстантоны) с изовекторными топологическими зарядами. Найдены соответствующие гомотопические группы для всех G. Обсуждается возможность топологической интерпретации квантовых чисел групп и частиц.

PACS: 02.20.Qs, 02.40.Sf

Как известно [1], возможность существования топологических возбуждений (вихрей или инстантонов) в двумерных вырожденных системах с параметром порядка $\psi(x)$ зависит от нетривиальности гомотопических групп $\pi_i(M)$ пространства M, в котором лежит ψ ($\psi \in M$). Обычным вихрям с целыми топологическими зарядами $e \in Z$ соответствует $M = S^1 = SO(2) = U(1)$ с $\pi_1(S^1) = Z$, а инстантонам – $M = S^2 = SO(3)/SO(2) = SU(2)/U(1)$ [2] или $M = CP(N) = U(N+1)/U(1) \times U(N)$ с $\pi_2(M) = Z$ [1,3]. Прямое обобщение этой классификации на $M = G$, где G – простые компактные группы, не проходит, так как $\pi_2(G) = 0$, а $\pi_1(G)$ конечна и равна нулю для односвязных групп, поэтому нужно рассматривать однородные пространства G/H (условия нетривиальности групп $\pi_{1,2}$ которых были сформулированы в [3–5]). Более аккуратный анализ показывает, что топологические возбуждения могут существовать и в случае, когда $\pi_{1,2} = 0$, но отличны от нуля относительные гомотопические группы [5,6]. Например, недавно в рамках модифицированной модели Вайнберга–Салама было показано, что в ней возможны метастабильные вихревые решения, хотя соответствующая $\pi_1(G) = 0$ [7,8]. Этот подход был обобщен на модели с другими группами и была построена общая теория так называемых "вложенных дефектов" [9].

Нахождение топологически устойчивых решений оживило старую, восходящую еще к Кельвину, гипотезу о топологической интерпретации частиц [10,11]. Но для того чтобы это было возможно, нужно, чтобы запас возможных топологических зарядов был таким же, как множество возможных квантовых чисел. Ранее уже отмечалось, что квантовые числа компактных групп G связаны с топологией максимальной коммутативной подгруппы T_G [12]. В этой статье будет показано, что компактные однородные пространства $M = T_G$ и $M = G/T_G$ обладают богатой топологической структурой, необходимой для топологической интерпретации квантовых частиц как в двумерном (в виде вихрей), так и в трехмерном (в виде точечных дефектов или частицеподобных решений) случаях, и будут найдены их гомотопические группы π_i ($i = 1, 2..$) для всех простых компактных G.

Начнем с простейшего обобщения окружности тора T^n, равного прямому произведению n окружностей

$$T^n = \prod_{i=1}^{n} \otimes S_i^1$$

Его гомотопическая группа $\pi_1(T^n) = \oplus_{i=1}^n Z_i$ и поэтому топологические заряды возможных вихрей

$$\psi(\theta)_{|x|\to\infty} = \Pi_{i=1}^n \otimes e^{2\pi i\varphi_i(\theta)},$$

где θ – угловая переменная на плоскости $\bar{x}$, $\varphi_i(2\pi) = n_i$, образуют n-мерную прямоугольную целочисленную решетку L_e^n, которая совпадает со своей обратной – решеткой весов характеров группы T^n. Так как веса группы характеризуют квантовые числа представлений, то из этого следует, что для T^n все квантовые числа имеют топологическую интерпретацию. Интересно, что в терминах $\pi_1(T^2) = H_1(T^2, Z)$ – группы циклов тора – могут быть описаны все "торические" узлы [13], включая известный " трилистник", который и был исходным пунктом гипотезы Кельвина.

Тор T^n в виде $\Pi_{i=1}^n \otimes U_i(1) = \Pi_{i=1}^n \otimes e^{2\pi i\varphi_i}$ может быть вложен как максимальная коммутативная подгруппа диагональных матриц $T_U(n)$ в унитарную группу $U(n)$. Поэтому, естественным обобщением T^n является случай $M = T_G$, где T_G - максимальная коммутативная подгруппа простой компактной группы G. Группу T_G образуют

$$g = e^{i2\pi \mathbf{H}_G\varphi}, \qquad \mathbf{H}_G = \{H_1, ...H_n\}, \qquad [H_i, H_j] = 0,$$

где n – ранг G, $\mathbf{H}$ - максимальная коммутативная (картанова) подалгебра алгебры Ли g группы G. Для односвязных G $\pi_1(T_G)$ изоморфна n-мерной решетке L_v^G дуальных корней $\mathbf{r}^v$. Решетка L_v^G является обратной к решетке весов L_ω^G, которая образована всеми возможными весами ω - собственными значениями алгебры $\mathbf{H}_G$.

Веса $\{\omega_a\}_\tau$, $a = 1, ..., p$, принадлежащие p-мерному неприводимому представлению $\tau(G)$ образуют наборы "квантовых чисел" представления $\tau(G)$. В общем случае L_ω^G имеет базис фундаментальных весов $\bar{\omega}_i, i = 1, ...n$, такой, что любой вес ω может быть представлен в виде

$$\omega = \sum_{1}^{n} n_i \bar{\omega}_i$$

где n_i – целые числа. Аналогично, L_v^G тоже имеет свой базис дуальных корней $\mathbf{r}_i^v$ $(i = 1, ..., n)$. Все простые компактные группы G, кроме $G = SO(N)$, являются односвязными. Для неодносвязных G группа $\pi_1(G)$ является подгруппой конечной дискретной группы центра Z_G, которая принадлежит $\tilde{T}_G$ - максимальному тору универсальной накрывающей группы $\tilde{G}$. Поэтому для неодносвязных G таких, что $G = \tilde{G}/\pi_1(G)$

$$\pi_1(T_G) = \pi_1(\tilde{T}_G) \times \pi_1(G) = L_v^G \times \pi_1(G)$$

Это означает, что $\pi_1(T_G)$ содержит L_v^G как подрешетку. Для групп $SO(N)$ $\pi_1(SO(N)) = Z_2$, а для присоединенных групп $G_{ad} = \tilde{G}/Z_G$

$$\pi_1(G_{ad}) = Z_G$$

Для групп G с простыми связями (то есть для групп серий $A_n = SU(n+1)$, $D_n = SO(2n), E = E_{6,7,8}$) L_v^G совпадает с решеткой всех корней L_r^G, являющейся подрешеткой решетки весов $L_r^G \subseteq L_\omega^G$. Структура всех решеток L_ω, L_r, L_v простых компактных групп G известна [14]. Стоит отметить, что в общем случае они уже не являются прямоугольными. Используя данные о решетках из [14], можно показать, что для ортогональных групп $SO(N)$ (серии B, D) решетка возможных топологических зарядов L_t^G

$$L_t^G = \pi_1(T_G) = L_v^G \times \pi_1(G) = L_v^G \times Z_2 = L_e^n, \quad n = \left[\frac{N}{2}\right], \tag{1}$$

где $[N/2]$ означает целую часть $N/2$, при этом $L_\omega/L_e^n = Z_2$, $L_e^n \subset L_\omega$, то есть веса спинорных представлений не входят в L_t^G. Для того, чтобы они входили нужно рассмотреть присоединенные группы $SO(N)$. Тогда, например, для $SO(2n) = D_n$

$$L_t^{adD_n} = \pi_1(T_{adD_n}) = L_e^n \times Z_2 = L_\omega^{D_n} \tag{2}$$

и веса спинорных представлений тоже могут быть представлены как топологические заряды. Для групп серии A_n и $E_{6,7}$ имеем

$$L_t^G = \pi_1(T_G) = L_r^G = L_\omega^G/Z_G, \quad \pi_1(T_{Gad}) = L_\omega^G, \tag{3}$$

$$Z_{A_n} = Z_{n+1}, \quad Z_{E_6} = Z_3, \quad Z_{E_7} = Z_2 \ ,$$

то есть опять только топологические заряды присоединенных групп дают всю L_ω^G.

Для групп серии $C_n = Sp(n)$ и E_8 получаем $(Z_{C_n} = Z_2, \ Z_{E_8} = 0)$

$$L_t^G = \pi_1(T_G) = L_\omega^G, \quad L_\omega^{C_n} = L_e^n, \quad \pi_1(T_{adC_n}) = L_e^n \times Z_2 = L_\omega^{B_n}. \tag{4}$$

Здесь решетка весов совпадает с решеткой топологических зарядов L_t^G, а для adC_n даже превосходит ее и содержит веса спинорных представлений групп $B_n = SO(2n+1)$. Для E_8 решетка L_ω является суммой двух решеток

$$L_\omega^{E_8} = L_e^8/Z_2 \oplus L_{spin}^{8+} \ , \tag{5}$$

где L_{spin}^{8+} образована векторами вида

$$Z\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\nu(i)}e_i\right) \ , \sum_{i=1}^{8}\nu(i) = 0 \ (\text{mod}2) \ ,$$

а e_i - ортонормированный репер.

И, наконец, для исключительных групп G_2, F_4 $(Z_{G_2} = Z_{F_4} = 0)$

$$L_t^{G_2} = \pi_1(T_{G_2}) = L_v^{G_2} = L_\omega^{A_2}; \quad L_v^{G_2}/L_\omega^{G_2} = Z_3 = L_\omega^{A_2}/L_r^{A_2} \ , \tag{6}$$

то есть $L_t^{G_2} \supset L_\omega^{G_2}$ и включает даже "кварковые" представления группы $A_2 = SU(3)$,

$$L_t^{F_4} = \pi_1(T_{F_4}) = L_v^{F_4} = L_r^{D_4} = L_e^4/Z_2; \quad L_\omega^{F_4}/L_v^{F_4} = Z_2 \times Z_2 = L_\omega^{D_4}/L_r^{D_4}, \tag{7}$$

и следовательно $L_t^{F_4}$ не содержит всю $L_\omega^{F_4} \supset L_t^{F_4}$. Из полученных результатов следует, что для групп $G = G_2, E_8, C_n, adA_n, adD_n, adE_{6,7}$ решетка всех возможных топологических зарядов $L_t^G \supseteq L_\omega^G$, и поэтому для них возникает возможность топологической интерпретации всех "квантовых чисел" этих групп. Имеется также возможность разбиения L_t^G на наборы зарядов, отвечающих неприводимым представлениям групп G', для которых $L_t^G = L_\omega^{G'}$. Например, $L_t^{G_2} = L_\omega^{A_2}, L_t^{E_8} = L_\omega^{E_8}, L_t^{C_n} = L_\omega^{C_n}$. Для групп G, у которых $L_t^{adG} = L_\omega^G$ (например, $G = A_n, D_n, E_{6,7}$) не все наборы топологических зарядов, отвечающих какому-либо представлению (например, кварковым представлениям групп A_n или спинорным представлениям групп D_n), будут соответствовать точным (однозначным) представлениям.

Аналогичные виды вихрей могут существовать и в случае, когда $\psi \in G$, но наложено граничное условие $\psi_{|x| \to \infty} \in T_G$ (отметим, что это условие необходимо для того, чтобы отдаленные друг от друга вихри могли свободно двигаться). Для этого необходима нетривиальность относительной гомотопической группы $\pi_2(G, T_G)$. Эта группа описывает гомотопические классы отображений диска D_2 в G при условии отображения его границы S_1 в T_G. Для вычисления $\pi_2(G, T_G)$ удобно сначала редуцировать ее к абсолютной гомотопической группе. Так как T_G есть замкнутая связная подгруппа группы G, то пару (G, T_G) можно рассматривать как расслоение G над базой G/T_G со слоем T_G. Тогда все $\pi_i(G, T_G)$ редуцируются к $\pi_i(G/T_G)$, а для вычисления последних можно использовать точную гомотопическую последовательность расслоения $G \xrightarrow{T_G} G/T_G$ [13]. Сначала рассмотрим ее "нижнюю" часть

$$\begin{gathered} \to \pi_2(T_G) \to \pi_2(G) \to \pi_2(G/T_G) \to \\ \to \pi_1(T_G) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/T_G) \to \pi_0(T) \to \pi_0(G). \end{gathered} \tag{8}$$

Используя известные результаты о гомотопических группах связных групп Ли $G(\pi_0(G) = \pi_0(T_G) = \pi_2(G) = \pi_2(T_G) = \pi_1(G/T_G) = 0)$, получим из (1) короткую последовательность

$$0 \to \pi_2(G/T_G) \to \pi_1(T_G) \to \pi_1(G) \to 0 \tag{9}$$

Из (9) и того, что для групп Ли все π_i – абелевы, следует, что

$$\pi_2(G/T_G) = \pi_1(T_G)/\pi_1(G) = \pi_1(\tilde{T}_G) = L_v^G \tag{10}$$

Из (10) следует, что

$$\pi_2(G, T_G) = \pi_2(G/T_G) = \pi_1(\tilde{T}_G) = L_v^G \tag{11}$$

для всех связных G. Это означает, что и в случае, когда $\psi \in G$ с граничным условием $\psi_{|x| \to \infty} \in T_G$, в системе имеются топологические возбуждения вихревого типа с топологическими зарядами $\in L_v^G$. Но теперь только для групп C_n, G_2, E_8 возможна топологическая интерпретация всех квантовых чисел. Для остальных групп квантовые числа некоторых фундаментальных представлений не будут иметь такой интерпретации.

Полученный для $\pi_2(G/T_G)$ результат означает также, что в двумерной системе с $\psi \in G/T_G$ возможны инстантоны с теми же топологическими зарядами. Более того, нетривиальность $\pi_2(G/T_G)$ делает возможным существование топологически устойчивых частицеподобных решений в трехмерных системах с $M = G/T_G$. Отметим, что пространство G/T_G допускает реализацию в виде орбит общего положения и максимальной размерности (ко)присоединенного действия группы G на своей алгебре Ли, что делает возможным применение полученных результатов к теориям типа "Большого Об'единения".

Поднимаясь "вверх" по точной гомотопической последовательности и используя тот факт, что $\pi_i(T_G) = 0$, $i > 1$, мы получаем

$$\pi_k(G) = \pi_k(G/T_G) = \pi_k(G, T_G), \quad k = 3, 4, \ldots \qquad (12)$$

Это означает, что для тех k, для которых $\pi_k(G) \neq 0$, d–мерные системы с $d = k$ или $d = k + 1$ и параметром порядка $\psi \in G/T_G$ или $\psi_{|x| \to \infty} \in T_G$ будут иметь те же топологические возбуждения, что и система с $\psi \in G$. Таким образом, однородное компактное пространство G/T_G, являясь естественным обобщением $M = S^2 = SO(3)/SO(2) = SO(3)/T_{SO(3)}$ на случай групп G ранга $n > 1$, обладает богатой топологической структурой, допускающей существование различных топологических возбуждений.

Топологические возбуждения вихревого типа, то есть связанные с $\pi_1(T_G)$, могут существовать в двумерных и трехмерных (в последнем случае, в виде вихревых нитей) решеточных моделях, обобщающих соответствующие XY-модели. Возбуждения, связанные с $\pi_2(G, T_G) = \pi_2(G/T_G)$ могут существовать в обобщенных моделях Хиггса–Салама–Вайнберга [1], а инстантоны, связанные с группами $\pi_k(G/T_G)$ $(k > 2)$, в – многомерных теориях Янга–Миллса [1]. При этом энергии топологических возбуждений в первых моделях будут логарифмически расходиться, тогда как в моделях с калибровочным полем энергии вихрей и монополей (как и инстантонов) будут конечными. Детальное обсуждение этих теорий будет проведено отдельно.

В заключение отметим, что топологические изовекторные заряды, принадлежащие решеткам L_r, L_ω, L_v, ранее возникали в обобщениях теории синус-Гордон на характеры групп G ранга $n > 1$ [12].

Автор благодарен Г.Воловику за полезное обсуждение затронутых в статье вопросов.

Работа поддержана грантом 96–02.17331–а Российского фонда фундаментальных исследований.

---

1. Р.Раджараман. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, М.: Мир, 1985. (R.Rajaraman, *Solitons and instantons*, Amsterdam-New-York-Oxford, 1982).
2. А.А.Белавин, А.М.Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 245 (1975).
3. V.Golo and A.M.Perelomov, Phys. Lett. **79B**, 112 (1978); А.М.Переломов, УФН **134**, 577 (1981).
4. Ю.С.Тюпкин, В.А.Фатеев, А.С.Шварц, Письма в ЖЭТФ **21**, 91 (1975); ТМФ **26**, 397 (1976).
5. М.И.Монастырский, А.М.Переломов. Письма в ЖЭТФ **21**, 94 (1975); М.И.Монастырский. *Топология калибровочных полей и конденсированных сред.* М.: Наука, 1995.
6. V.P.Mineev and G.E.Volovik. Phys. Rev. **B18**, 3197 (1978).
7. T.Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **68**, 1977 (1992); M.Hindmarsh, Phys. Rev. Lett. **68**, 1263 (1992).
8. M.Hindmarsh and T.W.B.Kibble, Rep. Prog. Phys. **58**, 477 (1995); G.E.Volovik and T.Vachaspati, Inter. J. Mod. Phys. **B10**, 471 (1996).
9. M.Barriola, T.Vachaspati and M.Bucher, Phys. Rev. D50 2819 (1994); N.F.Lepora and A.C. Davis, Preprint CERN-TH / 95-185,210.
10. Дж.Уилер. *Гравитация, нейтрино и вселенная*, М.: ИИЛ, 1962 (J.A.Wheeler, *Neutrinos, Gravitation and Geometry*, Bologna, 1960); T.H.R.Skyrme, Proc. Roy. Soc. **A260**, 127 (1961).
11. Y.Nambu, Phys. Rev. D10, 4262 (1974), Nucl. Phys. B130, 505 (1977); E.Witten. Nucl. Phys. **B223**, 422, 433 (1983); T.Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **76**, 188 (1996).
12. S.A.Bulgadaev, Nucl. Phys. **B224**, 349 (1983); Phys. Lett. **166B**, 88 (1986).
13. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. *Современная геометрия*, ч. I,II. М.: Наука, 1979; ч. III, М.: Наука, 1984.
14. Н.Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, М.: Мир, 1972 (N.Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*, Paris, 1968).