Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.10, стр.768 - 772 © 1996г. 25 мая

О ТРЕТЬИХ МОМЕНТАХ В СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

О.Г.Чхетиани[1)]

Институт космических исследований

117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 января 1996 г.

После переработки 1 апреля 1996 г.

Рассматривается эволюция корреляционных характеристик в однородной спиральной турбулентности. Получены дополнительные уравнения типа Кармана–Ховарта, описывающие эволюцию смешанного корреляционного тензора скорости и завихренности. В области спирального скейлинга решение полученного уравнения устанавливает точную связь между антисимметричной компонентой корреляционного тензора третьего ранга и средней диссипацией спиральности, являющуюся своего рода аналогом известного колмогоровского закона 4/5 [21].

PACS: 47.27.-i

Спиральность играет важную роль в процессах эволюции и устойчивости турбулентных и ламинарных течений [1]. В [2] было введено понятие спирального каскада и рассмотрены предельные случаи параллельных потоков энергии и спиральности по спектру – $E(k) \sim \bar{\epsilon}^{2/3}k^{-5/3}$, $H(k) \sim \bar{\eta}\bar{\epsilon}^{-1/3}k^{-5/3}$, что соответствует колмогоровскому каскаду, и потока спиральности без потока энергии – $E(k) \sim \bar{\eta}^{2/3}k^{-7/3}$, $H(k) \sim \bar{\eta}^{2/3}k^{-4/3}$ – собственно спирального каскада ($\bar{\epsilon}$, $\bar{\eta}$ – диссипации энергии и спиральности). В [3] были подробно рассмотрены спиральные каскады в стратифицированной и сжимаемой турбулентной среде и отмечено, что существует внутренний турбулентный масштаб, разделяющий области колмогоровского и спирального каскадов:

$$l_h \sim \bar{\epsilon}/\bar{\eta}.$$

В [4,5] было показано, что для генерации интегральной спиральности необходимо одновременное присутствие твердотельного вращения и температурно-плотностной стратификации или иных неоднородных факторов. В [5] также было подчеркнуто, что в данном случае спиральность накачивается в систему на всех турбулентных масштабах. Спиральность генерируется также в экмановском пограничном слое [6], в конвективной жидкости [7,8,3] и при аэродинамическом обтекании [9]. Следует также отметить диссипативный механизм генерации спиральности, впервые продемонстрированный в [10]. Проведены прямые измерения средней спиральности в турбулентном пограничном слое, слое смешения [11] и турбулентности за решеткой [11–15]. Во всех экспериментах отмечены ненулевые значения средней спиральности, основной вклад в которую приходится от больших вихрей. Отмечено было также, что малые возмущения спиральности, производимые искусственным источником перед решеткой, подхватываются и усиливаются турбулентным потоком за решеткой. Малые, но конечные значения средней спиральности за решеткой были получены и при отсутствии явного ее источника, что объясняется как влияние

1)e-mail: ochkheti@mx.iki.rssi.ru

слабой неколлинеарности отверстий решетки на турбулентный поток [11]. В турбулентном МГД-течении [16], тропической предтайфунной атмосфере [17] отчетливо наблюдаются спектры энергии $E(k) \sim k^{-7/3}$, количественно и качественно соответствующие спиральному каскаду. (В частности, в тропической зоне спиральный каскад наблюдается на масштабах $l_n > 6-7$ км [17].)

Присутствие спиральности в турбулентной системе естественным образом ставит задачу об ее влиянии на корреляционные свойства течения, в частности на высшие (непарные) корреляции (и, соответственно, о возможности ее измерения). Не делая гипотез о природе каскада, рассмотрим эволюцию корреляционных характеристик в однородной спиральной турбулентности. То есть мы полагаем, что в начальный момент времени существует ненулевая средняя спиральность. Парная корреляция $\langle v_{1i}v_{2j}\rangle$ имеет вид

$$\langle v_{1i}v_{2j}\rangle = A(r)\delta_{ij} + B(r)r_i r_j + C\epsilon_{ikl}r_l, \quad r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \tag{1}$$

Очевидно,

$$\langle v^2\rangle = 3A(0), \quad \langle \mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}\rangle = -6C(0).$$

Рассмотрим корреляционный тензор третьего ранга

$$b_{ik,l} = \langle v_{1i}v_{1k}v_{2l}\rangle = -\langle v_{2i}v_{2k}v_{1l}\rangle.$$

Общий вид подобного тензора следующий [18, 19]:

$$b_{ik,l} = S_1(r)\delta_{ik}n_l + S_2(r)\delta_{il}n_k + S_3(r)\delta_{nl}n_i + S_4(r)n_i n_k n_l +$$
$$+S_5(r)\epsilon_{ikl} + S_6(r)\epsilon_{ikt}n_t n_l + S_7(r)\epsilon_{ilt}n_t n_k + S_8(r)\epsilon_{klt}n_t n_i, \tag{2}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Антисимметричная часть тензора третьего ранга в гидродинамических работах не рассматривалась, поскольку она отлична от нуля лишь при наличии спиральности. Тензор $b_{ik,j}$ удовлетворяет следующим условиям симметрии [18, 19]:

$$b_{ik,j} = b_{ki,j} \quad b_{i,kj} = b_{i,jk}, \tag{3}$$

$$b_{i,kj} = -b_{kj,i}, \tag{4}$$

и несжимаемости

$$\partial b_{ik,j}/\partial r_j = 0, \tag{5}$$

откуда мы получаем, в частности, что $S_5 = S_6 = 0$, $S_7 = S_8$. Таким образом,

$$b_{ik,l} = D(r)\delta_{ik}n_l + E(r)(\delta_{il}n_k + \delta_{nl}n_i) + F(r)n_i n_k n_l + S(r)(\epsilon_{ilt}n_t n_k + \epsilon_{klt}n_t n_i) \tag{6}$$

(симметричная часть тензора подробно рассмотрена в [18–20] и, как мы увидим ниже, не влияет на получаемые результаты). Мы покажем, что антисимметричная часть, пропорциональная $S(r)$, непосредственным образом связана с потоком спиральности.

Рассмотрим смешанный двухточечный корреляционный тензор, определяемый произведением компонент скорости и завихренности $\langle v_{1i}w_{2j}\rangle$ и имеющий в однородном изотропном случае следующий вид:

$$\langle v_{1i}w_{2j}\rangle = -\left(2C(r) + r\frac{\partial C(r)}{\partial r}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{r}\frac{\partial C(r)}{\partial r}r_i r_j - \left(5B(r) + r\frac{\partial B(r)}{\partial r}\right)\epsilon_{ijl}r_l. \tag{7}$$

Из уравнений Навье–Стокса для его компонент нетрудно получить эволюционные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_{1i}w_{2j}\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_{1l}}\langle v_{1l}v_{1i}w_{2j}\rangle - \frac{\partial}{\partial x_{1l}}\langle v_{1i}v_{2l}w_{2j}\rangle + \frac{\partial}{\partial x_{1l}}\langle v_{1i}w_{2l}v_{2j}\rangle -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\langle p_1 w_{2j}\rangle + \nu\Delta_1\langle v_{1i}w_{2j}\rangle + \nu\Delta_2\langle v_{1i}w_{2j}\rangle. \tag{8}$$

Эти уравнения подобны уравнениям Кармана–Ховарта и являются дополнительными к ним при наличии спиральности в системе. Вследствие соленоидальности и регулярности корреляционных функций при $r=0$,

$$\langle p_1 w_{2j}\rangle = 0.$$

В случае однородной турбулентности мы можем извлечь производные из-под знака усреднения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle h_{ij}\rangle = \epsilon_{jst}\frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_s}[b_{li,t} - b_{i,lt}] + \epsilon_{lst}\frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_s}b_{i,tj} + 2\nu\Delta_r\langle h_{ij}\rangle =$$

$$= \epsilon_{jst}\frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_s}[b_{li,t} - b_{lt,i}] + 2\nu\Delta_r\langle h_{ij}\rangle. \tag{9}$$

После несложных преобразований ("симметричные" компоненты тензора $b_{li,t}$ дают нулевой вклад) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle h_{ij}\rangle = 2\left\{\left[\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{6S}{r^2}\right]n_i n_j - \left[\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right]\delta_{ij} + \nu\Delta\langle h_{ij}\rangle\right\}, \tag{10}$$

и при $i=j$, подставив явный вид h_{ii}, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}C(r) = \frac{2\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial}{\partial r}C(r)\right) + \frac{2}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 S(r)). \tag{11}$$

Предполагая, что при $r\to\infty$ порядок исчезновения функций $\partial C(r)/\partial r$ и $S(r)$ более высокий, чем $1/r^4$ и $1/r^3$, соответственно, и что $\nu r^4 \partial C(r)/\partial r + r^3 S(r)$ обращается в нуль при $r=0$, найдем спиральный аналог инварианта Лойцянского, сохраняющегося на заключительном этапе вырождения турбулентности [20]:

$$\Lambda_h = \int_0^\infty C(r) r^4 dr = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Представив $C(r)$ в виде

$$C(r) = \frac{1}{6}(-\langle \mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\rangle + \hat{C}(r)),$$

получим

$$\bar{\eta} + \frac{\partial}{\partial t}\hat{C}(r) = \frac{2\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial}{\partial r}\hat{C}(r)\right) + \frac{12}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 S(r)), \tag{13}$$

$$\bar{\eta} = 2\nu\langle\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\rangle,$$

где $\bar{\eta}$ – средняя диссипация спиральности [3].

Поток спиральности по спектру постоянен как в колмогоровском, так и в спиральном интервалах [2]. Поэтому можно с достаточной точностью пренебречь изменением во времени величины $\hat{C}(r)$ по сравнению с $\bar{\eta}$. Умножив уравнение на r^4 и проинтегрировав по r, получаем следующее соотношение для $S(r)$:

$$S(r) = \frac{\bar{\eta}}{60}r^2 - \frac{\nu r}{6}\frac{\partial}{\partial r}(\hat{C}(r)). \tag{14}$$

Очевидно, что в глубине инерционного интервала вязкий член мал, и мы имеем просто

$$S(r) = \frac{\bar{\eta}}{60}r^2. \tag{15}$$

Полученное точное соотношение аналогично известному закону 4/5, связывающему тройные продольные корреляции скорости с диссипацией энергии [21]. Отметим, что при его получении мы не использовали никаких гипотез о характере скейлинга. Если в турбулентной системе по каким-либо причинам возникает спиральность, то появляются дополнительные, отличные от нуля, компоненты 2-точечного корреляционного тензора третьего ранга, пропорциональные диссипации спиральности. В частности, для корреляции $\langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle$ мы получаем

$$\langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = -\frac{\bar{\eta}}{10}r_i. \tag{16}$$

Выбрав ось z, параллельной вектору $\mathbf{r}$, мы получаем

$$b_{xy,z} = b_{y,xz} = 0, \quad b_{zy,x} = b_{yz,x} = -S(r), \quad b_{xz,y} = b_{zx,y} = S(r).$$

Наблюдаемость подобных корреляций должна быть прямым и явным свидетельством присутствия в системе потока спиральности.

Следует отметить, что в [3] получено выражение для двухточечного семиинварианта произвольного ранга в области спирального скейлинга:

$$\langle v_{i1}(\mathbf{x})v_{i2}(\mathbf{x})\ldots v_{in}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = \mathrm{const}_n \cdot (\bar{\eta}r^2)^{n/3}\Theta_{i_1,\ldots,i_n}(\mathbf{n}), \tag{17}$$

где $\Theta_{i_1,\ldots,i_n}(\mathbf{n})$ – угловая часть спектрального тензора. (В неспиральном случае соответственно $(\bar{\varepsilon}r)^{n/3}$.)

В заключение выражаю благодарность С.С.Моисееву и А.В.Беляну за стимулирующие обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-19506), Министерства науки Российской Федерации, INTAS (грант INTAS-93-1194).

---

1. H.K.Moffat and A.Tsinober, Ann. Rev. Fluid Mech. **24**, 281 (1992).
2. A.Brissaud et al., Phys. Fluids **16**, 1363 (1973).
3. С.С.Моисеев, О.Г.Чхетиани, ЖЭТФ (в печати) (1996).
4. M.Steenbeck, F.Krause, and K.-H.Rädler, Z. Naturforsch A **21**, 364 (1966).
5. С.И.Вайнштейн, Я.Б.Зельдович, А.А.Рузмайкин, *Турбулентное динамо в астрофизике*, М.: Наука, 1980.
6. R.Hide, Geophys. Asrophys. Fluid Dyn. **48**, 69 (1989).

7. D.K.Lilly, J. Atm. Sci. **43**, 126 (1986).
8. М.Ф.Курганский, Физ. атм. и океана **29**, 464 (1993).
9. J.C.R.Hunt and F.Hussain, J.Fluid Mech. **229**, 569 (1991).
10. J.C.André and M.Lesieur, J. Fluid Mech. **81**, 181 (1977).
11. J.M.Wallace and J.L.Balint, In *Topological Fluid Mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1990, p.585.
12. E.A.Kit et al., Phys. Fluids **30**, 3323 (1987).
13. E.A.Kit et al., Fluid Dyn. Res. **3**, 289 (1988).
14. T.Dracos et al., In *Topological Fluid Mechanics*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1990, p.564.
15. M.Kholmyansky et al., Fluid. Dyn. Res. **7**, 65 (1991).
16. H.Branover, A.Eydelman, M.Nagorny, and M.Kireev, In *Progress in Turbulence Research*, Progress in Astronautics. and Aeronautics **162**, 64 (1994).
17. И.Н.Клепиков, И.В.Покровская, Е.А.Шарков, Исследования Земли из Космоса N *3*, 13 (1995).
18. И.О.Хинце, *Турбулентность*, М.: Наука, 1963.
19. S.Chandraseckhar, In *Selected papers*, **3**, Chickago Press, 1989, p.498.
20. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
21. А.Н.Колмогоров, ДАН СССР **32**(1), 19 (1941).