Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.10, стр.809 - 813 © 1996г. 25 мая

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, НАБЛЮДАЕМЫЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОВОДИМОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ МЕТАЛЛАХ

С.П.Новиков[1)], *А.Я.Мальцев*

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

117940 Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 апреля 1996 г.

Показано, что исследование проводимости в монокристалле нормального металла со сложной ферми-поверхностью в сильных магнитных полях $\mathbf{B}$ может обнаруживать целочисленные топологические характеристики, обусловленные топологией незамкнутых квазиклассических электронных траекторий. А именно, в случае незамкнутых траекторий общего положения всегда существует направление η, ортогональное к $\mathbf{B}$, проводимость вдоль которого стремится к нулю при больших B, причем это направление лежит в некоторой целочисленной (то есть порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскости, неподвижной при малых вариациях направления $\mathbf{B}$.

PACS: 02.40.Vh, 72.15.Gd

В данной работе описываются топологические эффекты, возникающие при изучении тензора проводимости нормальных металлов в сильных магнитных полях. При этом предполагается, что проводимость хорошо описывается в рамках квазиклассического приближения для одноэлектронной задачи с некоторым законом дисперсии $\epsilon(\mathbf{p})$, периодичном в пространстве квазиимпульсов с периодами, равными векторам обратной решетки. Единственная память о квантовой механике в теории состоит в переходе от евклидова пространства импульсов $\mathcal{E} = R^3$ к первой зоне Бриллюэна $\mathcal{B}$, являющейся трехмерным тором T^3, связанным с обратной решеткой, а также в виде функции $\epsilon(\mathbf{p})$. В этом приближении электроны обладают квазиклассическими траекториями, которые, как функции времени t, являются решениями системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\epsilon(\mathbf{p}) \ , \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}\,[\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]. \tag{1}$$

Система (1) является гамильтоновой с гамильтонианом $H(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p})$ и скобками Пуассона: $\{x_i, x_j\} = 0, \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{p_i, p_j\} = eB_{ij}/c$ $(i = 1, 2, 3)$, где $B_{ij} = -B_{ji}, B_{23} = B_1, B_{31} = B_2$ и т.д. Траектории системы (1) в импульсном пространстве даются пересечением поверхностей постоянной энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \mathrm{const}$ с плоскостями, перпендикулярными магнитному полю:

$$\mathbf{pB} = p_j B_j = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Описанная выше теория хорошо работает вплоть до сравнительно больших значений магнитного поля B, которые мы и будем рассматривать. Для сравнения укажем, что верхнее ограничение на величину магнитного поля есть

[1)]Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, Maryland 20742-2431; novikov@ipst.umd.edu, e-mail: novikov@landau.ac.ru условие применимости квазиклассики $\omega_B \ll \epsilon_F$, в то время как эффекты, обусловленные топологией траекторий, начинают проявляться при $\omega_B > \tau^{-1}$, где τ – время свободного пробега электронов (см. [1–3]).

Несмотря на аналитическую интегрируемость в расширенной зоне Бриллюэна $\mathcal{E}$, в случае сложных ферми-поверхностей существуют возможности для нетривиальных топологических эффектов. В этом случае могут существовать открытые траектории, определяемые как незамкнутые в $\mathcal{E}$. Если такая траектория замкнута в $\mathcal{B}$, будем называть ее открытой периодической.

Известно, что если все траектории системы (1) замкнуты, то электрическая проводимость в плоскости П, перпендикулярной магнитному полю **B**, стремится к нулю по мере того, как $B \to \infty$. Существование незамкнутых траекторий приводит к тому, что в тензоре проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ в плоскости П могут появляться неисчезающие при $B \to \infty$ члены. Если при этом все такие траектории лежат в полосах конечной ширины, имеющих (во всех плоскостях, ортогональных **B** и на всех энергетических уровнях, на которых имеются открытые траектории) одно общее направление $\vec{\eta}(\mathbf{B})$, то тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ имеет при $B \to \infty$ очень простую структуру, а именно: $j_{\vec{\eta}} = 0$, $j_\zeta = \sigma_\zeta E_\zeta$; здесь **j** – ток в плоскости П, **E** – электрическое поле, $\boldsymbol{\zeta}$ – направление, перпендикулярное $\vec{\eta}$ в плоскости П, то есть $\sigma_{\alpha\beta}$ – вырожденный тензор с ядром $\vec{\eta}(\mathbf{B})$. Все эти результаты естественным образом вытекают из вкладов отдельных траекторий, описанных в [1–3]. Более подробный материал может быть найден в [4] (как указал авторам В.Г.Песчанский, в этой книге присутствуют экспериментальные наблюдения, связанные с результатами данной работы).

Основной результат данной работы состоит в том, что если для поля **B** иррационального направления (то есть такого, что плоскость П не содержит векторов обратной решетки) имеются открытые траектории, то обязательно имеет место описанная выше ситуация, и, таким образом, вышеописанный вид тензора проводимости при $B \to \infty$, если он не обращается в нуль, является единственно возможным. Кроме того, в этом случае можно утверждать, что незамкнутые траектории существуют и обладают теми же свойствами и для магнитных полей с направлениями, лежащими в некоторой открытой окрестности исходного иррационального направления (на единичной сфере), причем каждый раз описанное выше направление $\vec{\eta}(\mathbf{B})$ задается пересечением $\Pi(\mathbf{B})$ с некоторой целочисленной (то есть порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскостью $\Gamma(\mathbf{B}_0)$, неизменной для данной окрестности.

Сформулированное выше утверждение описывает наиболее общую ситуацию, то есть случай магнитных полей общего положения. При этом наблюдаемые экспериментально зоны устойчивости и соответствующие им целочисленные плоскости $\Gamma(\mathbf{B}_0)$ являются нетривиальными топологическими характеристиками металла со сложной ферми-поверхностью. В случае, если магнитное поле таково, что плоскость $\Pi(\mathbf{B})$ содержит векторы обратной решетки, утверждение о том, что каждая открытая траектория лежит в полосе конечной ширины и проходит ее насквозь, остается в силе. Однако кроме описанных выше траекторий "общего положения" могут возникать открытые траектории с асимптотическими направлениями вдоль векторов обратной решетки $\vec{\eta}_\alpha$, содержащихся в $\Pi(\mathbf{B})$. Каждое семейство таких траекторий дает неисчезающий при $B \to \infty$ вклад в $\sigma_{\alpha\beta}$, идентичный описанному выше с той только разницей, что теперь вместо $\vec{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ и σ_ζ присутствуют соответственно $\vec{\eta}_\alpha, \zeta_\alpha$ и σ_{ζ_α}. Количество целочисленных направлений в металле, для которых наблюдается такая ситуация, не превосходит рода ферми-поверхности g[2]), поэтому направление магнитного поля должно быть специально подобрано так, чтобы можно было наблюдать такие вклады в тензор проводимости. Эти вклады легко выделить экспериментально, поскольку соответствующие открытые траектории остаются лишь для вариаций $\mathbf{B}$, перпендикулярных соответствующему $\vec{\eta}_\alpha$, и исчезают при всех остальных вариациях, что вызывает скачок в тензоре $\sigma_{\alpha\beta}$. Из топологического рассмотрения также вытекает, что если вместе с такими траекториями при данном направлении магнитного поля существуют и описанные выше траектории общего положения, то наблюдаемые при этом векторы $\vec{\eta}_\alpha$ должны принадлежать плоскости $\Gamma(\mathbf{B})$.

Таким образом, наблюдение электропроводности в металлах со сложной ферми-поверхностью в сильных магнитных полях позволяет выявить:

1) целочисленные направления $\vec{\eta}_\alpha$,

2) описанные выше зоны устойчивости с соответствующими им целочисленными плоскостями $\Gamma(\mathbf{B}_0)$.

Сформулированные физические следствия получены из математических результатов, представленных в [5–8][3]) (см.также [9, 10]). Приведем здесь эти результаты.

Используя отправную точку $\mathbf{p}(0)$ на открытой траектории, пределы

$$\vec{\eta}_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} [\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0)]/|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0)|, \tag{3}$$

если они существуют, будем называть выходящим и входящим асимптотическими направлениями, соответственно.

Далее, если $\vec{\eta}_+ = -\vec{\eta}_- = \vec{\eta}$, скажем, что открытая траектория имеет среднее направление. Если же, вдобавок, траектория лежит в полосе конечной ширины в плоскости (2) (с необходимостью параллельной $\vec{\eta}$), скажем, что у нее есть сильное среднее направление.

При описании следствий из топологических теорем, сформулированных главным образом в [6], [8], будем, для простоты, полагать, что на рассматриваемых энергетических уровнях $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ не обращается в нуль (то есть исключим из рассмотрения те значения энергии, при которых происходит перестройка изоэнергетического уровня), а также, что на каждой особой траектории лежит единственная особая точка (это выполняется для полей общего положения).

Имеются две возможности:

1) в очень специальных случаях может быть так, что на одном энергетическом уровне существуют открытые траектории, не имеющие среднего направления (см. [10]). В этом случае на всех других энергетических уровнях все траектории замкнуты. Эта ситуация не дает вклада в проводимость, как отвечающая нулевому фазовому объему;

2) в случае общего положения (то есть если не имеет места (1)) для полей иррационального направления открытые траектории, если они есть, существуют на энергетических уровнях в некотором связном энергетическом интервале $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$, и все имеют сильное среднее направление, даваемое пересечением плоскости $\Pi(\mathbf{B})$, перпендикулярной магнитному полю, некоторой

---

[2])Любая двумерная замкнутая ориентируемая поверхность топологически эквивалентна двумерной сфере с "ручками". Род поверхности g совпадает с количеством ручек.

[3])В [5] была поставлена топологическая проблема, в [7] уточняются некоторые вопросы, присутствующие в [5].

локально устойчивой целочисленной плоскостью $\Gamma(\mathbf{B}_0)$. На уровнях, лежащих вне этого интервала, незамкнутых траекторий нет. Если уровень Ферми попадает в указанный интервал, то экспериментально наблюдается вклад в проводимость таких траекторий с замечательными топологическими свойствами.

В более общем случае, то есть не требуя иррациональности направления $\mathbf{B}$, утверждение состоит в том, что любая открытая траектория лежит в зоне Бриллюэна $\mathcal{B} \equiv T^3$ на двумерном торе M- или N-типа (от англ. membrane и needle). Опишем эти понятия.

При фиксированном направлении магнитного поля удалим из каждого энергетического уровня в $\mathcal{B}$ те его части, которые состоят из несингулярных замкнутых в $\mathcal{E}$ траекторий. Границей полученного многообразия будут являться замкнутые в $\mathcal{E}$ сингулярные орбиты, которые можно заклеить в $\mathcal{B}$ дисками, лежащими в плоскости $\Pi(\mathbf{B})$. Существует нетривиальная топологическая теорема (см. [8]), утверждающая, что полученное многообразие является несвязным объединением непересекающихся двумерных торов в $\mathcal{B}$; двумерные торы, лежащие на разных энергетических уровнях, также не пересекают друг друга.

При этом могут появляться 2 типа двумерных торов. Простейший есть "игла"или тор N-типа, ограничивающий область в $\mathcal{B}$ и топологически гомологичный нулю в $\mathcal{B}$. Погружение такого тора в $\mathcal{B}$ напоминает цилиндр или трубу и может быть непрерывно деформировано в замкнутую кривую в $\mathcal{B}$. В расширенной зоне $\mathcal{E}$ накрытие такого тора представляет собой бесконечный периодически деформированный ("гофрированный") цилиндр, определяющий некоторый вектор $\vec{\eta}_\alpha$ обратной решетки. Продольные сечения этого цилиндра плоскостью $\Pi(\mathbf{B})$ дают открытые в $\mathcal{E}$ траектории. Ясно, что торы такого типа могут возникать только в том случае, если $\Pi(\mathbf{B})$ содержит векторы обратной решетки, и исчезают при вариациях $\mathbf{B}$, нарушающих это свойство. На рис.1 показан тривиальный случай, в котором открытые траектории направлены вдоль оси p_x.

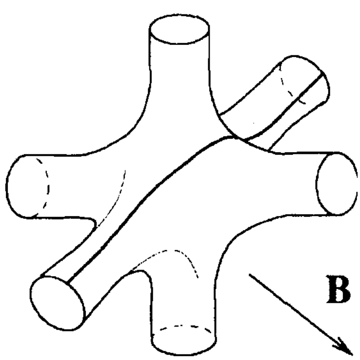

Рис.1. Открытая траектория, соответствующая целочисленному направлению (1,0,0), лежащему в плоскости $\Pi(\mathbf{B})$, перпендикулярной магнитному полю

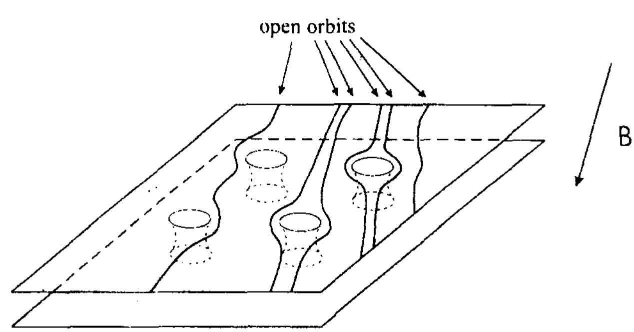

Рис.2. Пара целочисленных плоскостей в сложной поверхности Ферми, полученная после удаления замкнутых траекторий. Открытые траектории даются пересечением данных плоскостей плоскостью, перпендикулярной магнитному полю

Другая возможность - "мембрана" или тор M-типа, который не гомологичен нулю в $\mathcal{B}$ (то есть не ограничивает в $\mathcal{B}$ никакую область). В расширенной зоне Бриллюэна его накрытие представляет собой периодически деформированную целочисленную плоскость ("гофрированную плоскость"), пересечение с которой плоскости $\Pi(\mathbf{B})$ дает описанные выше открытые траектории "общего положения". Все такие плоскости, отвечающие всем торам M-типа, параллельны в $\mathcal{E}$, так как они не пересекают друг друга, и их общий гомологический класс и есть описанная ранее целочисленная плоскость $\Gamma(\mathbf{B}_0)$. Замыкание открытой траектории, лежащей на одном из торов M-типа в $\mathcal{B}$ покрывает этот тор, кроме первоначальных отверстий, с числом вращения $\alpha(\mathbf{B})$. Таким образом, такую траекторию можно рассматривать как квазипериодическую, и, следовательно, для изоэнергетических поверхностей общего положения любая открытая траектория является либо периодической, либо квазипериодической. Количество торов M-типа на данном энергетическом уровне четно, и их существенной чертой является то, что они локально устойчивы при вариации всех параметров, включая $\mathbf{B}$. Рис.2 иллюстрирует специальный случай в "толстой" ферми-поверхности. Если при этом имеются и "гофрированные цилиндры", то они также лежат в плоскости $\Gamma(\mathbf{B})$. Эти свойства приводят к экспериментальным предсказаниям, сформулированным выше. Рис.3 иллюстрирует наблюдаемую экспериментально ситуацию.

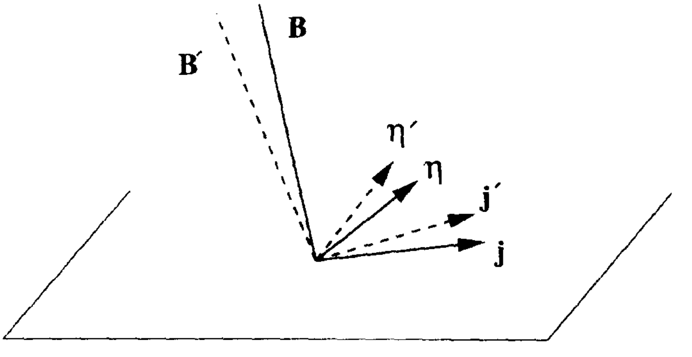

Рис.3. Вдоль направления $\vec{\eta}$, перпендикулярного $\mathbf{B}$, проводимость обращается в нуль при $B \to \infty$. Направление $\vec{\eta}$ перпендикулярно направлению тока $\mathbf{j}$, наблюдаемого при $B \to \infty$

В заключение авторы благодарят Л.А.Фальковского за консультации в физике твердого тела и Майкла Е. Фишера за помощь и полезные советы.

---

1. И.М.Лифшиц, В.Г.Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
2. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Физическая кинетика*, М.: Наука, 1979, гл.9, §84.
3. Ч.Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, М.: Наука, 1967, гл. 11, 12 (C.Kittel, *Quantum Theory of Solids*, John Wiley & Sons, INC. New-York - London, 1963).
4. И.М.Лифшиц, М.Я.Азбель, М.И.Каганов, *Электронная теория металлов*, М.: Наука, 1971.
5. С.П.Новиков, Успехи мат. наук 37, 3 (1982).
6. А.В.Зорич, Успехи мат. наук 39, 235 (1984).
7. С.П.Новиков, Proc. Conf. "Topological Methods in Mathematics", dedicated to the 60th birthday of J.Milnor, June 15-22 (1991) (S.U.N.Y. Stony Brook, 1993).
8. И.А.Дынников, Мат. заметки 53, 57 (1993).
9. Замечание: Физические приложения были впервые упомянуты: S.P. Novikov, Proc. Conf. of Geometry, December 15-26, 1993, Tel Aviv University (1995) [in press].
10. С.П.Царев, И.А.Дынников, Частное сообщение (1992-93).