Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.12, стр.963 - 969 © 1996г. 25 июня

БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ И СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ ОДНОРОДНОСТИ ВРЕМЕНИ

А.Ф.Андреев

Институт физических проблем им.П.Л.Капицы РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 мая 1996 г.

Сопровождающее бозе-конденсацию спонтанное нарушение калибровочной инвариантности в мезоскопических системах соответствует термодинамически равновесным основным состояниям с нецелым средним числом частиц и приводит к спонтанному нарушению однородности времени. В ферми-системах нарушение калибровочной инвариантности может сопровождаться также спонтанным нарушением инвариантностей относительно пространственных поворотов на угол 2π и двойного отражения времени. Обсуждаются возможные эксперименты.

PACS: 03.75.Fi

В экспериментах [1–3] по охлаждению атомов в магнитных ловушках было обнаружено явление бозе-конденсации в конечных мезоскопических системах с дискретным спектром. Специфической особенностью подобных систем является то, что в процессе их приготовления и охлаждения число частиц N в них не является фиксированным, но среднее число частиц $\bar{N}$ сохраняется, начиная с некоторого момента времени. Это среднее число характеризует основное состояние системы, и нет никаких оснований для него быть целым.

Такой же особенностью, в принципе, обладает и ряд других мезоскопических систем. Рассмотрим, например, систему ионов в ионной ловушке, из них один – однократно ионизован, остальные – двукратно. В основном состоянии системы лишний электрон симметрично и когерентно размазан по всем ионам. Предположим теперь, что лишний электрон в процессе ионизации и пространственного отделения ионов от свободных электронов остался в системе не с полной достоверностью. Тогда ее основное состояние будет соответствовать нецелому $\bar{N}$ электронов.

В металлических наноструктурах, активно исследуемых экспериментально [4,5], осуществляются состояния с нецелым $\bar{N}$ электронов в условиях, когда электрохимический потенциал близок к некоторым выделенным значениям (см. [4,5] и ниже).

Вопрос о смысле основного состояния с нецелым $\bar{N}$ тесно связан с возможностью осуществления в конечных системах спонтанного нарушения инвариантности относительно калибровочных преобразований $U(1)$, соответствующих умножению ψ-операторов рассматриваемых частиц на постоянный фазовый множитель. Последнее является основным аспектом бозе-конденсации в обычных сверхтекучих и сверхпроводящих бозе- и ферми-системах. Другим аспектом является наличие большого числа частиц в одном квантовом состоянии, что и было продемонстрировано в указанных выше экспериментах. Наличие большого числа частиц в одном состоянии не приводит автоматически к спонтанному нарушению калибровочной симметрии хотя бы потому, что любое состояние со сколь угодно большим, но определенным числом частиц, калибровочно инвариантно, поскольку генератором $U(1)$ является оператор $\hat{N}$

числа частиц. В жидком гелии и в сверхпроводниках U(1) нарушается в связи с тем, что N по существу бесконечно и потому неопределенно.

В первом разделе работы решается задача об основном состоянии простой модели с дискретным спектром, содержащей большое, но конечное число бозе-частиц, что качественно соответствует экспериментам [1–3]. На основе анализа решения в разд.2 введены понятия термодинамически равновесного основного и метастабильных состояний с нецелым $\bar{N}$, что обеспечивает механизм спонтанного нарушения $U(1)$. Механизм не связан со специальными свойствами модели, а носит общий характер и в той же мере применим к ферми-системам. Общий вывод заключается в следующем.

Спонтанное нарушение $U(1)$ в рассматриваемых системах, вообще говоря, всегда имеет место, и оно обязательно сопровождается спонтанным нарушением однородности времени. Последнее означает, что основное состояние системы не является стационарным состоянием с определенной энергией. Качественное объяснение этого на первый взгляд удивительного вывода легко получить, заметив, что спонтанное нарушение обеих симметрий происходит в состояниях с нецелым $\bar{N}$. По определению, основным при нецелом $\bar{N}$ является состояние, соответствующее минимальной энергии в системе отсчета, "вращающейся" с постоянной угловой скоростью $\mu/\hbar$, где μ – химпотенциал. (Имеется в виду вращение не в координатном пространстве, а в пространстве параметра порядка системы, где роль угла поворота играет фаза параметра порядка). Согласно основным принципам статистики, равномерное вращение не нарушает термодинамического равновесия, и при $T = 0$ осуществляется состояние с минимальной энергией при заданном $\mu/\hbar$. Переход во вращающуюся систему соответствует переходу от канонического к большому каноническому распределению (см. [6]). Характерные частоты вращения соответствуют вырождению основного состояния, то есть равенству во вращающейся системе энергий основных состояний с двумя неравными (целыми) собственными значениями N. Основное состояние с нецелым $\bar{N}$ есть линейная суперпозиция этих вырожденных состояний. Поскольку N в этих состояниях различно, линейная суперпозиция соответствует состоянию, не инвариантному относительно $U(1)$. Специфика данного случая заключается в том, что характерное для систем со спонтанным нарушением симметрии вырождение основного состояния имеет место во вращающейся системе отсчета. В лабораторной системе отсчета это суперпозиции двух состояний с различной энергией. Основные состояния с нецелым $\bar{N}$ не являются, следовательно, стационарными, но поскольку смешиваются два (а не более) собственных значения энергии, эти состояния оказываются периодическими во времени с периодом $2\pi\hbar/\Delta E$, где ΔE – разность смешиваемых энергий. Тот факт, что в результате спонтанного нарушения однородности времени возникают периодические состояния, не зависит от конкретного механизма нарушения однородности.

Мы покажем ниже, что основное состояние является суперпозицией состояний с соседними собственными значениями N. Параметр порядка, описывающий спонтанное нарушение U(1), соответствует в этом случае одночастичному "конденсату". Это утверждение относится не только к бозе-системам, где оно естественно, но и к системам ферми-частиц. В ферми-системах основное состояние может также соответствовать суперпозиции состояний с соседними значениями N той же четности, то есть парному "конденсату". Как метастабильные могут осуществляться суперпозиции состояний с числами частиц N и $N+n$, $n=2,3,\ldots$, то есть "конденсаты" пар, троек частиц и так далее.

В ферми-системах рассматриваемого типа спонтанное нарушение $U(1)$ может сопровождаться и более радикальными спонтанными нарушениями пространственно-временных симметрий. Именно, может нарушаться инвариантность относительно столь фундаментальных преобразований, как повороты на угол 2π относительно любых осей в обычном координатном пространстве и квадрата операции обращения времени. Уже сама принципиальная возможность таких состояний означает изменение физических представлений о свойствах пространства-времени.

Ниже обсуждаются возможные эксперименты, которые могли бы подтвердить изложенные соображения.

1. Рассмотрим модель бозе-частиц, каждая из которых может находиться в дискретных одночастичных состояниях с энергией $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \ldots$. Предполагая, что почти все частицы находятся в нулевом состоянии с энергией ϵ_0, запишем гамильтониан системы в виде

$$H = \epsilon_0 a_0^+ a_0 + \sum_k \epsilon_k a_k^+ a_k + G a_0^+ a_0^+ a_0 a_0 + \sum_k G_k (a_k^+ a_0^+ a_0 a_0 + a_0^+ a_0^+ a_0 a_k), \qquad (1)$$

где a_0^+, a_0, a_k^+, a_k – операторы рождения и уничтожения частиц в нулевом и k-том возбужденном состояниях ($k = 1,2,\ldots$); G и G_k – константы взаимодействия, равные

$$G = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\lambda \int \psi_0^4 dV, \qquad G_k = \frac{4\pi\hbar^2}{m}\lambda \int \psi_0^3 \psi_k dV.$$

Здесь m – масса частиц, $\lambda > 0$ – длина s-рассеяния частиц друг на друге, ψ_0, ψ_k – вещественные волновые функции нулевого и k-того состояний. В связи с предполагаемой относительно малой суммарной долей частиц, находящихся в состояниях $k=1,2,\ldots$, в гамильтониане взаимодействия учтены лишь члены, линейные по a_k и a_k^+. Квадратичные члены опущены; мы будем предполагать, что они малы по сравнению со вторым членом в формуле (1). Энергии ϵ_0, $\epsilon_k \sim \hbar^2/mR^2$, где $R \gg \lambda$ – линейный размер локализации частиц в потенциале ловушки; $G, G_k \sim \hbar^2\lambda/mR^3$. Отношение опущенных квадратичных по a_k, a_k^+ членов ко второму члену в (1) порядка $GN_0/\epsilon \approx GN/\epsilon \sim \lambda N/R$, где $N_0 = a_0^+ a_0$, $N_k = a_k^+ a_k$, $N = N_0 + \sum N_k$ – полное число частиц в системе. Наше предположение эквивалентно неравенству $N \ll R/\lambda$, которое противоположно обычно рассматриваемому (см., например, [7]). Мы предположим также, что все же $N \gg 1$.

Оператор $a_k^+ a_0^+ a_0 a_0$ не меняет N, но уменьшает N_0 на единицу. В нашем случае, когда $N_0 \approx N \gg 1$, этот оператор можно, как обычно, заменить на $N^{3/2} a_k^+$, то есть заменить a_0^+ и a_0 c-числом $N^{1/2}$. Важно подчеркнуть, что предварительно необходимо перейти от обычных переменных представления вторичного квантования (N_0, N_k) к переменным (N, N_k). Имеем

$$H = \epsilon_0 N + G(N^2 - N) + \sum_k \{\Delta_k(N) a_k^+ a_k + N^{3/2} G_k (a_k^+ + a_k)\}, \qquad (2)$$

где $\Delta_k(N) = \epsilon_k - \epsilon_0 - 2GN$. Мы пренебрегли в формуле (2) заведомо малыми членами $G(N-N_0)^2$ и $G(N-N_0)$, ниже будет видно, что $(N-N_0) \sim N(N\lambda/R)^2$.

Путем канонического преобразования

$$a_k = b_k + \zeta_k, \qquad a_k^+ = b_k^+ + \zeta_k,$$

где $\zeta_k = -N^{3/2}G_k/\Delta_k$, к новым бозе-операторам b_k, b_k^+, находим

$$H = \epsilon_0 N + G(N^2 - N) - gN^3 + \sum_k \Delta_k(N) b_k^+ b_k, \tag{3}$$

где

$$g = \sum_k G_k^2/\Delta_k \sim G\lambda/R.$$

Волновая функция $|0>_N$ основного состояния гамильтониана (3), соответствующая заданному N, в обычных переменных (N_0, N_k) равна

$$\left|0\right\rangle_N = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_k \zeta_k^2\right) \sum_{\{N_k\}} \left(\Pi_k \frac{\zeta_k^{N_k}}{\sqrt{N_k!}}\right) \left| N - \sum_k N_k, \quad \{N_k\}\right\rangle, \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем различным наборам $\{N_k\}$ чисел N_k; $|N_0, \{N_k\}>$ – волновая функция, соответствующая заданным N_0 и $\{N_k\}$. Несмотря на то, что функция (4) соответствует большому и не заданному числу частиц в нулевом состоянии N_0 (квантовые флуктуации δN_0 числа N_0 в состоянии (4) порядка $\delta N_0 \sim \zeta^2 \sim N(N\lambda/R)^2$, что много меньше N_0, но в области применимости формулы (4) может быть велико по сравнению с единицей) состояние (4) инвариантно относительно $U(1)$ в связи с тем, что N имеет определенное (целое) значение.

2. Перейдем с помощью унитарного преобразования $U = \exp[(i/\hbar)\mu\hat{N}t]$ в систему отсчета, "вращающуюся" с угловой скоростью $\mu/\hbar$. Энергия $E_0'(N)$ основного состояния системы из N частиц во вращающейся системе в силу (3) равна

$$E_0'(N) \equiv E_0(N) - \mu N = G(N^2 - N) - (\mu - \epsilon_0)N - gN^3. \tag{5}$$

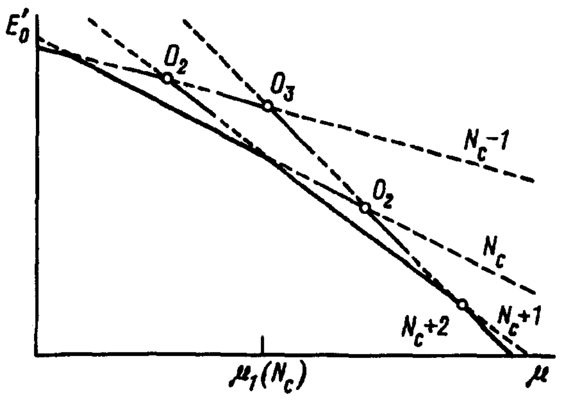

Рис.1

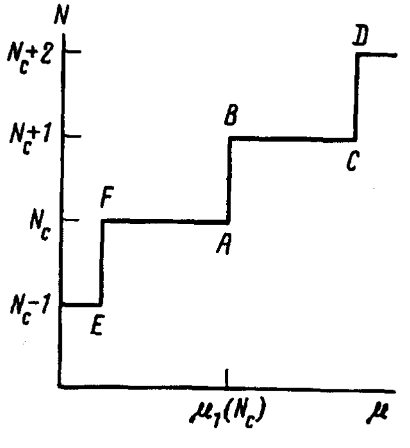

Рис.2

При заданном μ и $T = 0$ должно осуществляться состояние с минимальным E_0'. При изменении μ различные целые N будут соответствовать минимуму E_0'. На рис.1 представлены определяемые формулой (5) зависимости (прямые)

$E_0'(\mu)$ с различными целыми N. В точке $\mu = \mu_1(N)$, где

$$\mu_1(N) = \epsilon_0 + 2GN - 3gN^2, \tag{6}$$

пересекаются прямые $E_0'(\mu)$, соответствующие N и $N+1$, так что если в интервале $\mu_1(N_c - 1) < \mu < \mu_1(N_c)$ осуществлялось $N = N_c$, то в интервале $\mu_1(N_c) < \mu < \mu_1(N_c + 1)$ будет осуществляться $N = N_c + 1$ и т.д. На рис.2 представлена зависимость от μ равновесного числа частиц $N = N(\mu) = -\partial E_0'/\partial\mu$, соответствующая жирной сплошной кривой $E_0'(\mu)$ на рис.1. Точки, лежащие на вертикальных отрезках AB, CD, $EF, \ldots$ на рис.2 соответствуют термодинамически реализуемым основным состояниям системы. Это эквивалентно фазовым переходам 1 рода: отрезки AB, CD, $EF, \ldots$ есть области сосуществования фаз A и B, C и D, E и F, и т.д. Для того чтобы энтропия системы равнялась нулю, сосуществование должно описываться определенной волновой функцией (а не, например, матрицей плотности с нулевыми недиагональными элементами). Для точек на прямой AB имеем

$$|\bar{N}\rangle = (1-w)^{1/2}|N_c\rangle + w^{1/2}e^{i\varphi}|N_c + 1\rangle, \tag{7}$$

где $0 < w < 1$, φ – некоторая фаза, несущественный общий фазовый множитель выбран так, чтобы сделать положительным коэффициент при $|N_c >$.

Волновые функции (7) при любых φ и w (в указанном интервале) соответствуют одной (минимальной) энергии в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\mu_1(N_c)/\hbar$. Среднее число частиц $\bar{N}$ в состоянии (7) равно $N_c + w$. Спонтанное нарушение U(1) описывается фазой φ. Среднее значение оператора уничтожения a_0 в состоянии (7) равно

$$< \bar{N}|a_0|\bar{N} >= e^{i\varphi}[N_c w(1-w)]^{1/2}. \tag{8}$$

Именно состояния (7) являются основными состояниями общего вида для рассматриваемой системы. Значения $w = 0, 1$, когда в силу (8) нарушение симметрии отсутствует, соответствуют исключительным (невероятным) случаям целого $\bar{N}$.

В лабораторной системе отсчета состояния (7) нестационарны, но периодичны во времени с периодом $2\pi\hbar/\mu_1(N_c)$.

Тонкими сплошными линиями на рис.1 изображены метастабильные состояния системы с точками типа O_2, O_3,..., соответствующими сосуществованию состояний с N, отличающимися на 2, 3,... (Дальнейшее продолжение тонких линий за пределы, показанные на рис.1, приводит к неустойчивым состояниям с падающей зависимостью $N(\mu)$. Это обстоятельство показывает, что вблизи точек пересечения O_n имеется не два, как обычно при пересечении термов, а одно (но с неопределенной фазой φ) устойчивое состояние). Точке типа O_n с $n = 1, 2, \ldots$ соответствуют состояния вида

$$|\bar{N} >_n = (1-w)^{1/2}|N_c > + w^{1/2}e^{in\varphi}|N_c + n >, \tag{9}$$

что является обобщением (7) на $n > 1$. Среднее число частиц в данном случае равно $N_c + nw$, так что метастабильные состояния даже с целым $\bar{N} = N_c + 1$ являются суперпозицией состояний с $N = N_c$ и $N = N_c + n$. Среднее значение степеней оператора a_0 в состоянии (9) равно

$$< a_0 >_n = \ldots =< a_0^{n-1} >_n = 0, \quad < a_0^n >_n = e^{in\varphi}[N_c^n w(1-w)]^{1/2}. \tag{10}$$

Эти метастабильные состояния соответствуют n-частичным "конденсатам".

Отметим, что при $N \ll (R/\lambda)^{2/3}$, то есть когда квантовые флуктуации δN_0 числа частиц в подсистеме, состоящей из частиц, находящихся в нулевом состоянии, удовлетворяют условию $\delta N_0 \ll 1$, рассуждения настоящего раздела можно применить к самой этой подсистеме. Эта возможность интересна тем, что в данном случае последние неравенства в явном виде дают ограничение сверху на степень "незамкнутости", которая всегда должна существовать для обеспечения перехода системы в термодинамическое равновесие.

3. Результаты разд. 2 имеют общий характер и не связаны с конкретными свойствами рассмотренной в разд. 1 простой модели: от свойств модели зависит лишь конкретная зависимость энергий основных состояний $E_0(N)$ и энергий возбуждения системы $\Delta_k(N)$ от N. Они применимы для функции $E_0(N)$ общего вида, причем не только для системы бозе-, но и ферми-частиц.

В связи с этим интересно коснуться вопроса о возможных экспериментах. В спектроскопических экспериментах по поглощению света (для систем ионов в ионных ловушках) или по неупругому рассеянию света (для нейтральных систем в магнитных ловушках) можно измерять характерные значения энергий $\Delta_k(N)$, $k = 1, 2, \ldots$, возбуждения системы. Переходы из основных состояний типа (7) приводят к дублетам близких линий $\Delta_k(N_c)$ и $\Delta_k(N_c + 1)$. Собственно, наличие дублетов и связанного с ними, например, биения амплитуды рассеянного света и есть непосредственное проявление нестационарности основного состояния. Для наблюдения дублетов необходимо обеспечить такое охлаждение системы после каждого акта поглощения или рассеяния, которое бы существенно не меняло (если это охлаждение типа "испарения") числа частиц в системе. Требуется, чтобы изменение $\bar{N}$ в процессе охлаждения, компенсирующего один акт поглощения или рассеяния, было $\ll 1$.

В процессе релаксации системы к равновесию, в принципе, могут осуществляться обсуждавшиеся выше метастабильные состояния, соответствующие n-частичным "конденсатам". В этом случае расстояние между линиями $\Delta_k(N_c)$ и $\Delta_k(N_c + n)$ дублетов должно увеличиться в n раз.

4. В применении к системам ферми-частиц изложенные соображения должны быть модифицированы. В отсутствие внешнего магнитного поля уровни энергии при нечетном N двукратно вырождены (крамерсовское вырождение). В поле вырождение снимается, но неэквивалентность случаев четного и нечетного N сохраняется. Картина пересечения уровней энергии на рис.1 меняется: прямые, соответствующие нечетному N, должны быть параллельно сдвинуты вверх или вниз (в зависимости от характера взаимодействия) относительно прямых с четным N. Это приводит к тому, что на жирной сплошной кривой, соответствующей основному состоянию, при увеличении сдвига участки с четным N будут увеличиваться, а с нечетным – сокращаться (или наоборот), пока вообще не исчезнут. В ферми-системах могут осуществляться, таким образом, два принципиально различных типа основных состояний – с точками сосуществования типа O_1 и O_2. Основные состояния со спонтанным нарушением $U(1)$ определяются соответственно формулами (7) и (9) с $n = 2$. Второй случай соответствует парному "конденсату" в смысле формулы (10) при $n = 2$, но речь здесь не идет о связанных состояниях типа куперовских пар, и целое число N_c в формуле (9) может быть, в принципе, как четным, так и нечетным. Состояния, соответствующие первому случаю и формуле (7) (они фактически наблюдались экспериментально [5]), замечательны не только спонтанными нарушениями $U(1)$ и однородности времени. Во-первых, они соответствуют "однофермионному конденсату". В простейшем примере невзаимодействующих ферми-частиц, которые могут находиться в тех же одночастичных состояниях, которые рассмотрены в разд. 1, отличное от нуля аномальное среднее

оператора уничтожения a_k с $k=N_c$ равно

$$\langle\bar{N}|a_{N_c}|\bar{N}\rangle = e^{i\varphi}(-1)^{N_c}[w(1-w)]^{1/2}. \tag{11}$$

Самое поразительное свойство состояния (7) заключается в том, что оно соответствует спонтанному нарушению инвариантности относительно поворотов на 2π вокруг любой оси в обычном координатном пространстве и относительно квадрата операции обращения времени. При таких преобразованиях волновые функции, соответствующие состояниям с нечетным числом фермионов, меняют знак, а с четным – не меняют. Фаза φ в формулах (7) и (11) в обоих случаях переходит в $\varphi+\pi$ (так что инвариантность относительно произведения рассматриваемых операций сохраняется).

Ввиду кажущейся парадоксальности такого вывода можно было бы попытаться запретить линейные комбинации состояний с четным и нечетным числом фермионов. Однако для рассматриваемых систем это было бы явно неудовлетворительным. Мы должны были бы запретить волновые функции, которые описывают падение однофермионных квазичастиц изнутри на потенциальный барьер магнитной или ионной ловушки, и которые содержат линейные комбинации волн, вышедших из ловушки и отраженных внутрь нее.

Подчеркнем, что осуществимость состояний вида (7) означает изменение физических представлений о свойствах пространства-времени, превращая формальную двузначность спинорных представлений группы симметрии в реально наблюдаемые явления. Основное физическое свойство систем ферми-частиц типа (7), непосредственно обнаружимое на эксперименте, заключается в том, что они изменяют свое состояние при повороте на угол 2π. Чтобы наблюдать подобное изменение в системах со спонтанно нарушенной симметрией, необходимо иметь, по крайней мере, две подобные системы.

Схематический эксперимент заключается в следующем. Пусть две идентичные магнитные или ионные ловушки в течение длительного времени соединены малой и слабо проницаемой для частиц перемычкой (джозефсоновский контакт). Система характеризуется при этом единой фазой φ. Затем ловушки разделяются, и одна из них медленно поворачивается на угол 2π вокруг некоторой оси. После поворота перемычка восстанавливается. Поскольку фаза в поворачиваемой ловушке изменилась на π, а в неподвижной – осталась прежней, после поворота в системе должен произойти релаксационный процесс восстановления единой фазы, который может быть зарегистрирован. Такой же процесс должен происходить при повороте на угол $2\pi m$ с нечетным m. При повороте на угол, кратный 4π, подобный релаксационный процесс должен отсутствовать.

Настоящая работа выполнена во время визита автора в лабораторию Камерлинг-Оннеса Лейденского университета. Выражаю благодарность Дж.Фроссати за любезное приглашение и полезные обсуждения.

1. M.H.Anderson, J.K.Ensher, M.R.Matthews et al. Science **269**, 198 (1995).
2. C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tollett et al. Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
3. K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews et al. Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
4. K.A.Matveev, M.Gisselfält, L.I.Glazman et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 2940 (1993).
5. P.Joyez, P.Lafarge, A.Filipe et al., Phys. Rev. Lett. **72**, 2458 (1994).
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Статистическая физика*, М.: Наука, 1976, §§4, 26, 34.
7. G.Baym, C.J.Pethick, Phys. Rev. Lett. **76**, 6 (1996).