Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.1, стр.8 - 12

АТОМ В РЕЗОНАНСНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОМ ПОЛЕ: ТОЧНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ

А.В.Тайченачев, А.М.Тумайкин[1], *В.И.Юдин*

Новосибирский государственный университет

630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 22 мая 1996 г.

Развит аналитический метод нахождения точного стационарного решения для матрицы плотности атомов в резонансном монохроматическом поле произвольной эллиптичности и интенсивности. Получено в аналитическом инвариантном виде решение для переходов $F_g = F \to F_e = F + 1$ (F_g, F_e – угловые моменты основного и возбужденного состояний). Исследованы свойства полученного решения.

PACS: 32.80.-t

1. При решении многих задач о резонансном взаимодействии атомов со светом (нелинейная поляризационная спектроскопия, механическое действие света на атомы, включая лазерное охлаждение, и др.) необходимо знать точное стационарное решение оптических уравнений Блоха для атомной матрицы плотности с учетом зеемановской структуры энергетических уровней. Нахождение такого решения в аналитическом виде для замкнутых оптических переходов (когда нижний уровень является основным, а полная населенность сохраняется) в общем случае произвольных эллиптичности и интенсивности поля представляет собой весьма сложную задачу.

Ранее точное стационарное решение в общем случае было найдено для переходов $F_g = F \to F_e = F - 1$ и $F_g = F \to F_e = F$ (F_g, F_e – полные угловые моменты основного (g) и возбужденного (e) состояний, F – произвольное) [1, 2]. Переходы $F_g = F \to F_e = F + 1$ рассматривались в работах [3, 4], где было получено точное решение в частных случаях линейной и циркулярной поляризации поля. При произвольной эллиптичности света стационарное решение в аналитическом виде было найдено только для переходов с небольшими значениями полных угловых моментов ($F_g = 0 \to F_e = 1$, $F_g = 1/2 \to F_e = 3/2$) в работах по лазерному охлаждению атомов в полях с градиентом поляризации [5, 6]. В то же время, в экспериментах обычно используются переходы с большими значениями момента, например, ^{23}Na; ^{87}Rb – $F = 2$; ^{85}Rb – $F = 3$; ^{133}Cs – $F = 4$.

В данной работе рассмотрено резонансное взаимодействие атомов с монохроматическим полем. Предложен аналитический метод нахождения точного стационарного решения задачи об оптической накачке переходов $F_g = F \to F_e = F + 1$ для произвольных интенсивности и эллиптичности света. Наш метод основан на теореме, согласно которой, в случае чисто радиационной релаксации атомов, стационарная матрица плотности записывается в инвариантном виде как полином от оператора резонансного взаимодействия атомов с полем. Отметим, что развитый в данной работе подход может быть применен также и к переходам $F_g = F \to F_e = F$, при этом стационарные решения совпадают с результатами [1, 2], полученными другими методами.

---

[1]e-mail: llf@admin.nsu.nsk.su или tumaikin@univ.nsk.su

2. Рассмотрим резонансное взаимодействие атомов, основное и возбужденное состояния которых образуют замкнутый оптический переход $F_g = F \to F_e = F + 1$, с плоской эллиптически поляризованной волной

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= E_0 \mathbf{e} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})] + \text{к.с.}, \\
\mathbf{e} &= \sum_{q=0,\pm 1} e^q \mathbf{e}_q \,,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $\mathbf{e}$ – единичный комплексный вектор поляризации поля, e^q – его компоненты в циклическом базисе $\{\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\pm 1} = \mp(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}\}$. В частности, если выбрать ось квантования z вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, а ось x вдоль большой полуоси эллипса поляризации, то $\mathbf{e}$ можно записать в виде

$$
\mathbf{e} = \cos\varepsilon \cdot \mathbf{e}_x + i \sin\varepsilon \cdot \mathbf{e}_y = -\cos(\varepsilon - \pi/4)\cdot \mathbf{e}_{+1} - \sin(\varepsilon - \pi/4)\cdot \mathbf{e}_{-1}, \tag{2}
$$

где ε – угол эллиптичности ($-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4$), определяемый так, что $|\mathrm{tg}\varepsilon|$ равен отношению малой полуоси эллипса поляризации к большой, а знак ε зависит от направления вращения.

Атомы будем описывать матрицей плотности $\widehat{\rho}$, которую в базисе зеемановских волновых функций основного $\{|g,\mu_g\rangle\}$ и возбужденного $\{|e,\mu_e\rangle\}$ состояний можно разбить на четыре матричных блока $\widehat{\rho}^{gg}, \widehat{\rho}^{ee}, \widehat{\rho}^{eg}, \widehat{\rho}^{ge}$:

$$
\begin{aligned}
\rho^{gg}_{\mu_g \mu'_g} &= \langle g, \mu_g|\widehat{\rho}|g, \mu'_g\rangle \,, & \rho^{ee}_{\mu_e \mu'_e} &= \langle e, \mu_e|\widehat{\rho}|e, \mu'_e\rangle \,, \\
\rho^{eg}_{\mu_e \mu_g} &= \langle e, \mu_e|\widehat{\rho}|g, \mu_g\rangle \,, & \rho^{ge}_{\mu_g \mu_e} &= \langle g, \mu_g|\widehat{\rho}|e, \mu_e\rangle \,,
\end{aligned} \tag{3}
$$

$\widehat{\rho}^{gg}$, $\widehat{\rho}^{ee}$ имеют смысл матриц плотности основного и возбужденного состояний, соответственно, а недиагональные элементы $\widehat{\rho}^{eg}$, $\widehat{\rho}^{ge}$ описывают оптическую когерентность между основным и возбужденным состояниями. Выделяя в $\widehat{\rho}^{eg}$ и $\widehat{\rho}^{ge}$ быструю зависимость от времени и координат, $\widehat{\rho}^{eg} = \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\widehat{\widetilde{\rho}}^{eg}$, и используя приближение вращающейся волны, получим следующую систему обобщенных уравнений Блоха для стационарной матрицы плотности (см., например, [2]):

$$
\widehat{\widetilde{\rho}}^{eg} = \left(\widehat{\widetilde{\rho}}^{ge}\right)^{\dagger} = -\frac{i\Omega}{\gamma/2 - i\delta}\left[\widehat{V}\widehat{\rho}^{gg} - \widehat{\rho}^{ee}\widehat{V}\right] \;; \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma\widehat{\rho}^{ee} &= \gamma S \widehat{V}\widehat{\rho}^{gg}\widehat{V}^{\dagger} - \frac{\gamma}{2}S\left\{\widehat{V}\widehat{V}^{\dagger}\widehat{\rho}^{ee} + \widehat{\rho}^{ee}\widehat{V}\widehat{V}^{\dagger}\right\} + i\delta S\left\{\widehat{V}\widehat{V}^{\dagger}\widehat{\rho}^{ee} - \widehat{\rho}^{ee}\widehat{V}\widehat{V}^{\dagger}\right\} , \\
\widehat{\gamma}\{\widehat{\rho}^{ee}\} &= -\gamma S \widehat{V}^{\dagger}\widehat{\rho}^{ee}\widehat{V} + \frac{\gamma}{2}S\left\{\widehat{V}^{\dagger}\widehat{V}\widehat{\rho}^{gg} + \widehat{\rho}^{gg}\widehat{V}^{\dagger}\widehat{V}\right\} + i\delta S\left\{\widehat{V}^{\dagger}\widehat{V}\widehat{\rho}^{gg} - \widehat{\rho}^{gg}\widehat{V}^{\dagger}\widehat{V}\right\} \;;
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{gg}\} + \mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{ee}\} = 1 \,. \tag{6}
$$

Здесь $\delta = (\omega - \omega_{eg} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})$ – отстройка от резонанса с учетом доплеровского сдвига, $\omega_{eg} = (E_e - E_g)/\hbar$ – частота перехода; γ^{-1} – радиационное время жизни возбужденного состояния; $\Omega = -E_0\langle e||d||g\rangle/\hbar$ – эффективная частота Раби, $\langle e||d||g\rangle$ – приведенный матричный элемент дипольного момента, $S = |\Omega|^2/(\gamma^2/4 + \delta^2)$ – параметр насыщения. Матричные элементы $\widehat{V}$ выражаются через $3jm$-символы в соответствии с теоремой Вигнера–Эккарта [7]:

$$
V_{\mu_e \mu_g} = \sum_{q=0,\pm 1} (-1)^{F_e - \mu_e} \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -\mu_e & q & \mu_g \end{pmatrix} e^q \,. \tag{7}
$$

Для замкнутых оптических переходов оператор прихода атомов в основное состояние за счет спонтанного излучения $\widehat{\gamma}\{\widehat{\rho}^{ee}\}$ имеет стандартный вид (см., например, [8]):

$$\gamma_{\mu_g\mu'_g}\{\widehat{\rho}^{ee}\} =$$
$$= \gamma(2F_e+1)\sum_{q,\mu_e,\mu'_e}(-1)^{F_e-\mu_e}\begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -\mu_e & q & \mu_g \end{pmatrix}\rho^{ee}_{\mu_e\mu'_e}(-1)^{F_e-\mu'_e}\begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -\mu'_e & q & \mu'_g \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Отметим, что реально атомы выходят на стационарный режим при выполнении следующих условий на время t взаимодействия атомов с полем: $\gamma\mathrm{St} \gg 1$; $\gamma t \gg 1$.

3. Наш метод основан на теореме, которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема. Для произвольных F_g и F_e в случае чисто радиационной релаксации, когда стационарные уравнения Блоха имеют вид (5) с оператором прихода (8), матрицы плотности $\widehat{\rho}^{gg}$ и $\widehat{\rho}^{ee}$ коммутируют с эрмитовыми матрицами $\widehat{V}^\dagger\widehat{V}$ и $\widehat{V}\widehat{V}^\dagger$, соответственно:

$$\left[\widehat{V}^\dagger\widehat{V},\widehat{\rho}^{gg}\right]=0\,; \qquad \left[\widehat{V}\widehat{V}^\dagger,\widehat{\rho}^{ee}\right]=0\,. \tag{9}$$

Как известно из алгебры, это означает, что решение системы (5) в базисе собственных векторов операторов $\widehat{V}^\dagger\widehat{V}$ и $\widehat{V}\widehat{V}^\dagger$ имеет диагональный вид. Кроме того, поскольку вследствие (9) члены при $i\delta$ в (5) обращаются в нуль, матрицы $\widehat{\rho}^{gg}$ и $\widehat{\rho}^{ee}$ зависят только от четных степеней δ. Подчеркнем, что (9) в общем случае выполняется только для стационарного решения, так как в случае произвольной эллиптичности оператор прихода (8) индуцирует когерентность между собственными состояниями $\widehat{V}^\dagger\widehat{V}$ [8] и, следовательно, нестационарная матрица плотности не удовлетворяет (9).

Исходя из утверждения *Теоремы* (9), стационарные матрицы плотности $\widehat{\rho}^{ee}$ и $\widehat{\rho}^{gg}$ для переходов $F_g = F \to F_e = F+1$ при произвольном S можно представить в виде полиномов от матриц $\widehat{V}\widehat{V}^\dagger$ и $\widehat{V}^\dagger\widehat{V}$:

$$\widehat{\rho}^{ee} = \beta S\sum_{n=0}^{2F}C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}\widehat{V}^\dagger)^{n+1}, \tag{10}$$
$$\widehat{\rho}^{gg} = \beta\left[\sum_{n=0}^{2F}C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^{n} + S\sum_{n=0}^{2F}C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^{n+1}\right],$$

где коэффициенты $C_n(\varepsilon)$ зависят только от эллиптичности и удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{2F}C_n(\varepsilon)\cdot\widehat{\gamma}\left\{(\widehat{V}\widehat{V}^\dagger)^{n+1}\right\} = \sum_{n=0}^{2F}C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^{n+1}. \tag{11}$$

Число уравнений в (11) равно $(2F+1)^2$, однако система сильно вырождена и ее ранг равен $2F$, то есть один из коэффициентов можно выбрать произвольным образом (так, например, ниже мы будем полагать $C_{2F}(\varepsilon)=1$). Поэтому для определения $C_n(\varepsilon)$ могут быть выбраны любые $2F$ линейно независимых уравнений из (11). Подчеркнем, что коэффициенты $C_n(\varepsilon)$ являются инвариантами, т.е. не зависят от выбора системы координат. Константа β в (10) определяется из условия нормировки (6):

$$\beta = [\alpha_0 + 2S\alpha_1]^{-1}, \tag{12}$$

$$\alpha_0 = Tr\left\{\sum_{n=0}^{2F} C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^n\right\}\ ;\quad \alpha_1 = Tr\left\{\sum_{n=0}^{2F} C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^{n+1}\right\}.$$

Таким образом, решение системы (5), состоящей из $[(2F+1)^2+(2F+3)^2]$ уравнений, в силу *Теоремы* можно записать в аналитическом инвариантном виде, определив только $(2F+1)$ коэффициентов ($2F$ коэффициентов $C_n(\varepsilon)$, так как один из них можно выбрать произвольным образом, и нормировочную константу β).

Подставляя теперь (10) в (4), получим выражение для $\widehat{\rho}^{eg}$ и $\widehat{\rho}^{ge}$:

$$\widehat{\rho}^{eg} = (\widehat{\rho}^{ge})^\dagger = -\frac{i\beta\Omega}{\gamma/2 - i\delta}\widehat{V}\sum_{n=0}^{2F} C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^n . \tag{13}$$

Можно показать, что аналитическое решение (10)–(13) является единственным.

4. Рассмотрим некоторые свойства полученного решения. Из (10)-(13) видно, что тензорная структура стационарных матриц $\widehat{\rho}^{ee}$, $\widehat{\rho}^{eg}$ и $\widehat{\rho}^{ge}$ полностью определяется единичным вектором поляризации света e, а амплитуда и отстройка поля входят только в соответствующие скалярные множители. В то же время, анизотропия основного состояния существенным образом зависит от параметра насыщения S, так как второй член в выражении для $\widehat{\rho}^{gg}$ (см. (10)) получается из первого умножением на матрицу $S(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})$.

Как следует из (10), (12), отношение полных населенностей основного и возбужденного состояний равно:

$$\frac{\mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{ee}\}}{\mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{gg}\}} = \left[\frac{\alpha_0}{S\alpha_1}+1\right]^{-1} . \tag{14}$$

Отсюда легко определить условия слабого и сильного насыщения перехода. Так, слабому насыщению соответствует $(S\alpha_1/\alpha_0) \ll 1$. При этом $\mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{ee}\} \ll \mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{gg}\}$; $\beta \approx 1/\alpha_0$, а в (10) можно пренебречь вторым слагаемым в выражении для $\widehat{\rho}^{gg}$:

$$\widehat{\rho}^{ee} \approx \frac{S}{\alpha_0}\sum_{n=0}^{2F} C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}\widehat{V}^\dagger)^{n+1}\ ;\quad \widehat{\rho}^{gg} \approx \frac{1}{\alpha_0}\sum_{n=0}^{2F} C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^n . \tag{15}$$

Обратное условие $(S\alpha_1/\alpha_0) \gg 1$ соответствует сильному насыщению перехода. При этом полные населенности основного и возбужденного состояний выравниваются: $\mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{ee}\} \approx \mathrm{Tr}\{\widehat{\rho}^{gg}\}$; $\beta \approx 1/(2S\alpha_1)$, а в (10) можно пренебречь первым слагаемым в выражении для $\widehat{\rho}^{gg}$:

$$\widehat{\rho}^{ee} \approx \frac{1}{2\alpha_1}\sum_{n=0}^{2F} C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}\widehat{V}^\dagger)^{n+1}\ ;\quad \widehat{\rho}^{gg} \approx \frac{1}{2\alpha_1}\sum_{n=0}^{2F} C_n(\varepsilon)\cdot(\widehat{V}^\dagger\widehat{V})^{n+1} . \tag{16}$$

5. В качестве примера приведем результаты вычислений коэффициентов $C_n(\varepsilon)$, $\alpha_0(\varepsilon)$ и $\alpha_1(\varepsilon)$ для трех переходов $F_g = F \to F_e = F + 1$ при $F = 1, 3/2, 2$.

Переход $F_g = 1 \to F_e = 2$:

$$C_2 = 1,\quad C_1 = -\frac{2}{15},\quad C_0 = \frac{7 + 2\cos(4\varepsilon)}{1500},\quad \alpha_0 = \frac{21 - 4\cos(4\varepsilon)}{1500},\quad \alpha_1 = \frac{7 - 3\cos(4\varepsilon)}{3000}.$$

Переход $F_g = 3/2 \to F_e = 5/2$:

$$C_3 = 1,\quad C_2 = -\frac{1}{6},\quad C_1 = \frac{155 + 29\cos(4\varepsilon)}{16800},\quad C_0 = -\frac{27 + 13\cos(4\varepsilon)}{168000};$$

$$\alpha_0 = \frac{69 - 29\cos(4\varepsilon)}{84000},\quad \alpha_1 = \frac{169 - 108\cos(4\varepsilon) + 3\cos(8\varepsilon)}{1440000}.$$

Переход $F_g = 2 \to F_e = 3$:

$$C_4 = 1,\quad C_3 = -\frac{4}{21},\quad C_2 = \frac{440 + 59\cos(4\varepsilon)}{33075},\quad C_1 = -\frac{1361 + 497\cos(4\varepsilon)}{3472875},$$

$$C_0 = \frac{2[1083 + 737\cos(4\varepsilon) + 32\cos(8\varepsilon)]}{510512625};$$

$$\alpha_0 = \frac{2[9615 - 6094\cos(4\varepsilon) + 167\cos(8\varepsilon)]}{510512625},\quad \alpha_1 = \frac{269 - 220\cos(4\varepsilon) + 15\cos(8\varepsilon)}{56723625}.$$

Результаты расчетов при больших значениях F будут опубликованы.

6. Найденное в данной работе точное стационарное решение задачи об оптической накачке переходов $F_g = F \to F_e = F + 1$, как и любое точное решение квантовомеханической задачи, представляет интерес с фундаментальной точки зрения. Кроме того, оно может быть использовано в различных приложениях, связанных с взаимодействием атомов с поляризованным излучением: нелинейная оптика, нелинейная поляризационная спектроскопия, лазерное охлаждение атомов и пр. Отметим, что замкнутые переходы $F_g = F \to F_e = F + 1$ присутствуют в $2D$-линии щелочных металлов и часто используются в экспериментах.

Объединяя результаты настоящей статьи и работ [1, 2], можно считать, что найдены все стационарные решения задачи о резонансном взаимодействии эллиптически поляризованного света с атомами для замкнутых оптических переходов с произвольными значениями угловых моментов F_g и F_e.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 95-02-04752-а).

1. В.С.Смирнов, А.М.Тумайкин, В.И.Юдин, ЖЭТФ **96**, 1613 (1989).
2. А.В.Тайченачев, А.М.Тумайкин, В.И.Юдин, Г.Ниенхаус, ЖЭТФ **108**, 415 (1995).
3. А.П.Казанцев, В.С.Смирнов, А.М.Тумайкин, И.А.Ягофаров, Препринт 5, ИОА СО АН СССР, Томск (1982); Опт. и спектр. **57**, 189 (1984).
4. Bo Gao, Phys. Rev. **A48**, 2443 (1993).
5. J.Dalibard, S.Reynaud, and C.Cohen-Tannoudji, J. Phys. **B17**, 4577 (1984).
6. C.Cohen-Tannoudji and J.Dalibard, J. Opt. Soc. Amer. **B6**, 2023 (1989).
7. Д.А.Варшалович, А.И.Москалев, В.К.Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Л.: Наука, 1975.
8. G.Nienhuis, Optics Commun. **59**, 353 (1986).