Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.2, стр.116 - 121 © 1996г. 25 июля

АФФИННАЯ АЛГЕБРА $s\ell(2|1)$ РЕАЛИЗУЕТСЯ В N=2 СТРУНЕ

А.М.Семихатов

Отдел Теоретической физики им.И.Е.Тамма, Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 июня 1996 г.

Аффинная алгебра $s\ell(2|1)$ реализована на мировом листе N = 2-струны в *конформной* калибровке.

PACS: 11.25.Hf, 11.25.Pm

N=2 струны [1] изучаются уже в течение *двадцати*(!) лет и до сих пор способны преподносить неожиданности. В недавней работе [2] им отведена особенно выдающаяся роль в М-теории – унифицирующей фундаментальной теории, основанной на ряде глубоких наблюдений над струнными дуальностями. В данной работе мы устанавливаем тот, несколько неожиданный, [5–9] факт, что во всякой некритической $N=2$ струне реализовано представление алгебры токов $s\ell(2|1)$. Напомним, что теория некритической $N=2$ струны построена из $N=2$ материи, представленной (в суперконформной калибровке) тензором энергии-импульса $T_{\rm m}(z)$ (с центральным зарядом $c_{\rm m}=-3-6k$), $U(1)$-током $H_{\rm m}(z)$ и двумя токами суперсимметрии $G_{\rm m}(z)$ и $\overline{G}_{\rm m}(z)$, а также из репараметризационных и $U(1)$-фермионных духов bc и $\eta\xi$ и их суперпартнеров, двух бозонных духовых теорий $\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}$ и $\beta\gamma$, а также из теории Лиувилля, представленной комплексными скаляром $\partial\overline{\phi},\partial\phi$ и фермионом $\overline{\psi},\psi$. Определяющие операторные произведения имеют вид

$$\begin{array}{rclrclrcl} b(z)\,c(w) &=& \frac{1}{z-w}\,, & \eta(z)\,\xi(w) &=& \frac{1}{z-w}\,, & \widetilde{\beta}(z)\,\widetilde{\gamma}(w) &=& \frac{-1}{z-w}\,,\\ \beta(z)\,\gamma(w) &=& \frac{-1}{z-w}\,, & \partial\phi(z)\,\partial\overline{\phi}(w) &=& \frac{-1}{(z-w)^2}\,, & \psi(z)\,\overline{\psi}(w) &=& \frac{1}{z-w}\,, \end{array} \tag{1}$$

а тензор энергии-импульса –

$$\begin{aligned} \mathsf{T} \;=\; & T_{\rm m}-\partial bc-2b\partial c-\eta\partial\xi-\tfrac{1}{2}\partial\beta\gamma-\tfrac{3}{2}\beta\partial\gamma-\tfrac{1}{2}\partial\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}-\tfrac{3}{2}\widetilde{\beta}\partial\widetilde{\gamma}-\\ & -\partial\phi\partial\overline{\phi}+\tfrac{1}{2}\,\partial\partial\overline{\phi}+\tfrac{1}{2}q^2\,\partial\partial\phi+\tfrac{1}{2}\partial\psi\overline{\psi}-\tfrac{1}{2}\psi\partial\overline{\psi}. \end{aligned} \tag{2}$$

Подчеркнем, что (аналогично работам [3–5]) мы не предполагаем никаких дополнительных свойств N=2 материи, помимо N=2 суперконформной алгебры.

1. Покажем, как введенные поля организуются в $s\ell(2|1)$ токи E_1, E_2, E_{12}, H^-, H^+, F_1, F_2, F_{12}. Верхне-треугольные токи строятся совсем просто:

$$E_1=\psi\,e^{\phi}\,,\qquad E_2=\overline{\psi}\,e^{\phi}\,,\qquad E_{12}=e^{2\phi}\,. \tag{3}$$

Для того чтобы компактно записать оставшиеся токи, введем скалярные токи: $\partial F=bc+\frac{1}{2}\beta\gamma+\frac{1}{2}\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}+\eta\xi-\frac{1}{2}\partial\overline{\phi}-\frac{1}{2}(3+k)\partial\phi$, $\partial U=bc+\frac{1}{2}\beta\gamma+\frac{1}{2}\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}+\eta\xi-\frac{1}{2}\partial\overline{\phi}-\frac{1}{2}(3-k)\partial\phi$ (они нормированы на $\mp k/2$, соответственно), тогда

$$F_1 \;=\; \left(G_{\rm m}-\overline{\psi}\partial F-\tfrac{1}{2}H_{\rm m}\overline{\psi}-(k+\tfrac{1}{2})\partial\overline{\psi}\right)e^{-\frac{1}{k}(U-F)}\,,\qquad H^+=-\tfrac{1}{2}H_{\rm m}+\tfrac{1}{2}\psi\overline{\psi}\,, \tag{4}$$

$$F_2 \;=\; \left((k+1)\overline{G}_{\rm m}+\psi\partial F-\tfrac{1}{2}H_{\rm m}\psi+(k+\tfrac{1}{2})\partial\psi\right)e^{-\frac{1}{k}(U-F)}\,,\quad H^-=\partial U\,, \tag{5}$$

и F_{12} однозначно определяется $s\ell(2|1)$-операторными произведениями[1]):

$$
\begin{array}{llllll}
H^{\pm}(z)H^{\pm}(w) = \dfrac{\pm k/2}{(z-w)^2}, & H^-(z)E_{12}(w) = \dfrac{E_{12}}{z-w}, & H^-(z)F_{12}(w) = \dfrac{-F_{12}}{z-w}, \\
F_{12}(z)E_1(w) = \dfrac{-F_2}{z-w}, & F_{12}(z)E_2(w) = \dfrac{F_1}{z-w}, & H^{\pm}(z)E_1(w) = \dfrac{\frac{1}{2}E_1}{z-w}, \\
H^{\pm}(z)F_1(w) = \dfrac{-\frac{1}{2}F_1}{z-w}, & H^{\pm}(z)E_2(w) = \dfrac{\mp\frac{1}{2}E_2}{z-w}, & H^{\pm}(z)F_2(w) = \dfrac{\pm\frac{1}{2}F_2}{z-w}, \\
\end{array}
$$

$$
E_1(z)F_1(w) = \frac{-k}{(z-w)^2} + \frac{H^+ - H^-}{z-w}, \quad E_2(z)F_2(w) = \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{H^+ + H^-}{z-w},
$$

$$
E_{12}(z)F_{12}(w) = \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{2H^-}{z-w}, \quad E_{12}(z)F_1(w) = \frac{E_2}{z-w},
$$

$$
E_{12}(z)F_2(w) = -\frac{E_1}{z-w}, \quad E_1(z)E_2(w) = \frac{E_{12}}{z-w}, \quad F_1(z)F_2(w) = \frac{F_{12}}{z-w}
$$

Оказывается далее, что степени свободы в пространстве введенных полей, ортогональные $s\ell(2|1)$-алгебре, естественным образом организуются в духи Дринфельда–Соколова – четыре духовые системы, необходимые для построения БРСТ-комплекса, описывающего гамильтонову редукцию аффинной алгебры $s\ell(2|1)$ [8, 6] (включая вспомогательную bc систему, используемую при наложении связей):

$$
\begin{array}{llll}
\widetilde{\mathrm{B}} = \widetilde{\beta}e^{-\phi}, & \widetilde{\Gamma} = \widetilde{\gamma}e^{\phi}, & \mathrm{B} = \beta e^{-\phi}, & \Gamma = \gamma e^{\phi}, \\
\mathcal{B} = be^{-2\phi}, & \mathcal{C} = ce^{2\phi}, & \mathcal{C} = \xi e^{2\phi}, & \mathcal{B} = \eta e^{-2\phi}.
\end{array} \tag{6}
$$

Непосредственно проверяется следующее фундаментальное тождество:

$$
T_{Sug} + T_{DS} = \mathrm{T}, \tag{7}
$$

где T – тензор энергии-импульса (2), T_{Sug} – сугаваровский тензор энергии-импульса алгебры $s\ell(2|1)$ и тензор энергии-импульса духов Дринфельда–Соколова имеет вид $T_{DS} = -\widetilde{\mathrm{B}}\partial\widetilde{\Gamma} - \mathrm{B}\partial\Gamma - \mathcal{B}\partial\mathcal{C} - \mathcal{C}\partial\mathcal{B}$. Тождество (7) утверждает, что с точки зрения тензоров энергии-импульса некритическая $N = 2$-струна есть то же самое, что и аффинная алгебра $s\ell(2|1)$ плюс духи Дринфельда–Соколова (мы *не* касаемся вопроса о соответствии *физических* состояний двух теорий).

2. Осуществленное построение $s\ell(2|1)$-токов (3)–(5) переносится и на случай *топологических* струн [10]. Пусть топологическая материя представлена генераторами $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$, $\mathcal{G}_{\mathrm{m}}$, $\mathcal{Q}_{\mathrm{m}}$ и $\mathcal{H}_{\mathrm{m}}$, удовлетворяющими топологической конформной алгебре (в конвенциях из [3]) с топологическим центральным зарядом $\mathrm{c} = -3 - 6k$. Пусть также $\overline{\psi}$ обозначает градиент 'топологического' фермиона $\partial\chi$, для которого $\partial\chi(z)\psi(w) = 1/(z-w)$. Мы сохраним обозначение $\partial\overline{\phi}$ для лиувиллевского поля, обычно [10] обозначаемого в топологической струне как $\partial\pi$. Духи топологической струны составлены, соответственно, бозонными и фермионными системами β, γ и b, c. Из этих ингредиентов мы следующим образом строим $s\ell(2|1)$-токи:

$$
\mathcal{H}^+ = \tfrac{1}{2}\psi\overline{\psi} - \tfrac{1}{2}\mathcal{H}_{\mathrm{m}}, \quad \mathcal{H}^- = \tfrac{1}{2}(k-3)\partial\phi - \tfrac{1}{2}\partial\overline{\phi} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9}{2\mathrm{q}^2} + \tfrac{\mathrm{q}^2}{3}\right)bc + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9}{2\mathrm{q}^2} - \tfrac{\mathrm{q}^2}{3}\right)\beta\gamma,
$$

[1]) Предупреждение: нормальное упорядочение всегда подразумевается в виде $:A:BC::$, так что вершинные операторы $\exp(a\phi)$, записанные для краткости в виде общего множителя, следует умножить на каждое из слагаемых в скобке, после чего использовать указанное упорядочение.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \Big(\mathcal{G}_{\rm m} - \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9}{2\mathsf{q}^2} + \tfrac{\mathsf{q}^2}{3}\big)bc\overline{\psi} - \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9}{2\mathsf{q}^2} - \tfrac{\mathsf{q}^2}{3}\big)\beta\gamma\overline{\psi} + \tfrac{1}{2}\partial\overline{\phi}\overline{\psi} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(3+k)\partial\phi\overline{\psi} - \tfrac{1}{2}\mathcal{H}_{\rm m}\overline{\psi} - (\tfrac{1}{2}+k)\partial\overline{\psi}\Big)e^{-\phi}, \qquad (8)\\
\mathcal{F}_2 &= \Big((1+k)\mathcal{Q}_{\rm m} + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9}{2\mathsf{q}^2} + \tfrac{\mathsf{q}^2}{3}\big)bc\psi + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{9}{2\mathsf{q}^2} - \tfrac{\mathsf{q}^2}{3}\big)\beta\gamma\psi - \tfrac{1}{2}\partial\overline{\phi}\psi - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(3+k)\partial\phi\psi - \tfrac{1}{2}\mathcal{H}_{\rm m}\psi + (\tfrac{1}{2}+k)\partial\psi\Big)e^{-\phi},
\end{aligned}
$$

в то время как $\mathcal{E}_i = E_i$, (уравнение (3)) а $\mathcal{F}_{12}$ порождается токами $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Здесь q – свободный параметр, связанный с фоновым зарядом (топологического) поля Лиувилля. Чтобы увидеть это, рассмотрим 'топологический' аналог условия полноты (7). Токи (8) отличаются от (3)–(5), помимо изменений в секторе материи, переопределением духов. В соответствии с этим, для духов Дринфельда–Соколова вместо (6) имеем

$$
\begin{aligned}
\mathsf{B}_t &= \beta e^{-(9/(2\mathsf{q}^2)-(\mathsf{q}^2)/3)\phi}, & \Gamma_t &= \gamma e^{(9/(2\mathsf{q}^2)-(\mathsf{q}^2)/3)\phi},\\
B_t &= b e^{-(9/(2\mathsf{q}^2)+(\mathsf{q}^2)/3)\phi}, & C_t &= c e^{(9/(2\mathsf{q}^2)+(\mathsf{q}^2)/3)\phi},
\end{aligned} \qquad (9)
$$

а "условие полноты" (7) принимает, как можно явно проверить, вид

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{k+1}\Big(\mathcal{H}^-\mathcal{H}^- - \mathcal{H}^+\mathcal{H}^+ + \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{12}\mathcal{F}_{12} + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_{12}\mathcal{E}_{12} + \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_1\mathcal{F}_1 - \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_1\mathcal{E}_1 - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_2\mathcal{F}_2 + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_2\mathcal{E}_2\Big) + \\
&\quad + \partial\mathcal{H}^- + \partial\mathcal{H}^+ - \partial B_tC_t - 2B_t\partial C_t - \partial\mathsf{B}_t\Gamma_t - 2\mathsf{B}_t\partial\Gamma_t = \qquad (10)\\
&\quad = -\partial bc - 2b\partial c - \partial\beta\gamma - 2\beta\partial\gamma + \mathcal{T}_{\rm m} - \partial\overline{\phi}\partial\phi + \partial\psi\overline{\psi} + (\mathsf{q}^2+k)\partial\partial\phi,
\end{aligned}
$$

куда входит *дважды скрученный* сугаваровский тензор энергии-импульса, а в правой части получаем (при $\overline{\psi} = \partial\chi$) тензор энергии-импульса топологической струны.

3. Далее мы построим *представление* алгебры $s\ell(2|1)$ в нашей новой реализации. Проще работать с топологической версией ввиду меньшего количества входящих в нее полей. Для духов, а также в $\overline{\psi}\psi$-секторе, выберем $sl(2)$-инвариантные вакуумы

$$
b_{\geq -1}|0\rangle_{bc}=0,\ \ c_{\geq 2}|0\rangle_{bc}=0,\ \ \beta_{\geq -1}|0\rangle_{\beta\gamma}=0,\ \ \gamma_{\geq 2}|0\rangle_{\beta\gamma}=0,\ \ \overline{\psi}_{\geq 0}|0\rangle_{\overline{\psi}\psi}=0,\ \ \psi_{\geq 1}|0\rangle_{\overline{\psi}\psi}=0,
$$

а в теории топологической материи – примарное состояние, являющееся одновременно "киральным" и "БРСТ-инвариантным":

$$
\mathcal{Q}_{\geq 0}|h\rangle = \mathcal{G}_{\geq 0}|h\rangle = \mathcal{L}_{\geq 1}|h\rangle = \mathcal{H}_{\geq 1}|h\rangle = 0, \quad \mathcal{H}_0|h\rangle = h|h\rangle, \quad \mathcal{L}_0|h\rangle = 0. \qquad (11)
$$

В работе [11] такие состояния были названы *топологическими* примарными состояниями; именно они соответствуют модулям над аффинными алгебрами Ли с единственным вектором старшего веса. $s\ell(2|1)$-старший вес теперь получается непосредственно из теории струны, как один из сомножителей в тензорном произведении с вакуумами духов Дринфельда–Соколова:

$$
|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} \otimes |0\rangle_{B_tC_t} \otimes |0\rangle_{\mathsf{B}_t\Gamma_t} = |0\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma} \otimes |0\rangle_{\overline{\psi}\psi} \otimes |h\rangle \otimes |p\rangle_{\overline{\phi}\phi}, \qquad (12)
$$

где $|p\rangle_{\overline{\phi}\phi}$ – состояние, соответствующее вертексному оператору $\exp(p\phi)$. Из (8) имеем следующие условия старшего веса (выполняя разложение по модам в согласии со значениями размерностей, определенными тензором энергии-импульса (10)):

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_1)_{\geq 1}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0, & (\mathcal{F}_1)_{\geq 0}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0, & \mathcal{H}^+_{\geq 1}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0,\\
(\mathcal{E}_2)_{\geq 0}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0, & (\mathcal{F}_2)_{\geq 1}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0, & (\mathcal{F}_{12})_{\geq 1}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0,\\
(\mathcal{E}_{12})_{\geq 1}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0, & \mathcal{H}^-_{\geq 1}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} &= 0.
\end{aligned}$$

Кроме того, для картановских токов находим собственные значения:

$$\mathcal{H}^+_0|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} = -\tfrac{h}{2}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)}, \qquad \mathcal{H}^-_0|p,h\rangle_{s\ell(2|1)} = \tfrac{p}{2}|p,h\rangle_{s\ell(2|1)}. \tag{13}$$

4. Для построения аналогичной (12) конструкции для представлений собственно $N=2$ струны достаточно тензорно умножить обе части в (12) на недостающие духи и произвести затем соответствующее $O(2,2)$-вращение в духовом секторе. Тогда тензор энергии-импульса (2) сообщит состоянию старшего веса размерность $(p-h)/2$, и требование ее обращения в нуль в то же время окажется требованием зануления полного $U(1)$-заряда, а кроме того, *также и условием того, чтобы* $(F_2)_0$ *и* $(F_{12})_1$ *аннулировали состояние старшего веса* (притом, что все другие требуемые условия зануления уже удовлетворены). Тем самым $N=2$ струна представляется "само-КПЗ"-теорией, для которой формулировка в духе [12] оказывается возможной прямо в конформной калибровке.

5. Вне непосредственной связи с некритической теорией струны можно несколько упростить приведенную выше конструкцию путем исключения как струнных духовых полей, так и духов Дринфельда–Соколова. Для этого в пространстве полей следует выбрать базис, состоящий из токов ∂U и ∂F, одного (комплексного) фермиона и $N=2$ материи; сугаваровский тензор энергии-импульса вычисляется тогда как

$$T_{Sug} = T_{\rm m} - \tfrac{1}{k}\partial F\partial F - \partial\partial F - \tfrac{1}{2}\psi\partial\overline{\psi} + \tfrac{1}{2}\partial\psi\overline{\psi} + \tfrac{1}{k}\partial U\partial U. \tag{14}$$

6. В заключение выведем связь нашего нового представления для $s\ell(2|1)$ и представлений Вакимото [8] (последних два [13] в соответствии с тем, что эта алгебра имеет две неэквивалентные системы простых корней). Пока теория $N=2$ материи произвольна, представление (3)–(5) отлично от представления Вакимото. Тем не менее, *если* представить $N=2$ материю через свободные поля, то в получаемом полном пространстве полей возможно построение вакимотовских свободных полей таким образом, что при их подстановке в представление Вакимото последнее принимает форму представлений (3)–(5). Интересно (хотя и не неожиданно), что два "различных" [13] представления Вакимото оказываются связаны при этом с двумя существенно различными реализациями $N=2$ материи через свободные поля. Первая имеет вид [14]

$$\begin{aligned}
T_{\rm m} &= \tfrac{1}{2}\chi\partial\overline{\chi} - \tfrac{1}{2}\partial\chi\overline{\chi} + \partial\overline{X}\partial X - \tfrac{1}{2}\partial\partial\overline{X} - \tfrac{1}{2}(k+1)\partial\partial X, && (15)\\
H_{\rm m} &= \partial\overline{X} - (k+1)\partial X - \chi\overline{\chi}, \quad \overline{G}_{\rm m} = -\overline{\chi}\partial\overline{X} + (k+1)\partial\overline{\chi}, \quad G_{\rm m} = \chi\partial X - \partial\chi,
\end{aligned}$$

где $\partial\overline{X}(z)\partial X(w) = 1/(z-w)^2$, $\chi(z)\overline{\chi}(w) = -1/(z-w)$, и позволяет построить ингредиенты представления Вакимото – свободные поля с операторными произведениями

$$\beta_{\rm w}(z)\gamma_{\rm w}(w) = \frac{-1}{z-w}, \qquad \partial\varphi_{\rm w}(z)\partial\overline{\varphi}_{\rm w}(w) = \frac{1}{(z-w)^2},$$

$$\Psi^{(1)}_{\rm w}(z)\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w}(w)=\frac{-1}{z-w},\qquad \Psi^{(2)}_{\rm w}(z)\overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w}(w)=\frac{1}{z-w},$$

реализующие алгебру $s\ell(2|1)$ как [8]

$$\begin{aligned}
E_1 &= \Psi^{(2)}_{\rm w}\beta_{\rm w}-(k+1)\Psi^{(1)}_{\rm w}, \qquad E_2 = \overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w}, \qquad E_{12} = \beta_{\rm w},\\
H^+ &= -\tfrac12\partial\overline{\varphi}_{\rm w}+\tfrac12(k+1)\partial\varphi_{\rm w}-\tfrac12\Psi^{(1)}_{\rm w}\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w}+\tfrac12\Psi^{(2)}_{\rm w}\overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w},\\
H^- &= -\tfrac12\partial\overline{\varphi}_{\rm w}-\tfrac12(k+1)\partial\varphi_{\rm w}-\tfrac12\Psi^{(1)}_{\rm w}\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w}-\tfrac12\Psi^{(2)}_{\rm w}\overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w}+\gamma_{\rm w}\beta_{\rm w},\\
F_1 &= -\overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w}\gamma_{\rm w}+\partial\varphi_{\rm w}\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w}-\partial\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w},\\
F_2 &= \Psi^{(2)}_{\rm w}\gamma_{\rm w}\beta_{\rm w}-\partial\overline{\varphi}_{\rm w}\Psi^{(2)}_{\rm w}-(k+1)\Psi^{(1)}_{\rm w}\gamma_{\rm w}-\Psi^{(2)}_{\rm w}\Psi^{(1)}_{\rm w}\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w}+k\partial\Psi^{(2)}_{\rm w}
\end{aligned}$$

(где F_{12} определяется токами F_1 и F_2). Именно, при подстановке сюда следующей реализации вакимотовских полей в терминах полей из (3)–(5), (15)

$$\begin{aligned}
\beta_{\rm w} &= e^{\frac{2}{k}(U-F)},\\
\gamma_{\rm w} &= \left(\partial F+\tfrac12(k+1)\partial X+\tfrac12\partial\overline{X}+\tfrac12\psi\overline{\psi}-\tfrac12\chi\overline{\chi}-(k+1)\overline{\psi}\overline{\chi}\right)e^{-\frac{2}{k}(U-F)},\\
\partial\overline{\varphi}_{\rm w} &= \partial\overline{X}-\tfrac{k+1}{k}\partial U+\tfrac{k+1}{k}\partial F, \qquad \partial\varphi_{\rm w} = \partial X+\tfrac1k\partial F-\tfrac1k\partial U, \qquad (16)\\
\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w} &= \chi e^{-\frac1k(U-F)}+(k+1)\overline{\psi}e^{-\frac1k(U-F)}, \qquad \Psi^{(1)}_{\rm w} = \overline{\chi}e^{\frac1k(U-F)},\\
\overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w} &= \overline{\psi}e^{\frac1k(U-F)}, \qquad \Psi^{(2)}_{\rm w} = (\psi+(k+1)\overline{\chi})e^{-\frac1k(U-F)}
\end{aligned}$$

мы воспроизводим конструкцию (3)–(5) (конечно, с бозонизованной материей). При этом экранирующие операторы представления Вакимото оказываются целиком в "материальном" секторе, например

$$\Psi^{(1)}_{\rm w}e^{\varphi_{\rm w}}=\overline{\chi}e^{X}, \qquad \left(\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w}\beta_{\rm w}-(k+1)\overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w}\right)e^{\frac{1}{k+1}\overline{\varphi}_{\rm w}}=\chi e^{\frac{1}{k+1}\overline{X}}, \qquad (17)$$

и аналогично для третьего, бозонного, экранирующего тока.

Альтернативное представление $N=2$ материи через свободные поля [3, 4] требует введения фермионной bc-системы $\overline{\omega}\omega$, "лиувиллевского" тока $\partial\mathcal{F}$ и свободного тока с тензором энергии-импульса $T_0=\frac12\partial\mathcal{X}\partial\mathcal{X}-(\frac12\mathsf{a}_-+\mathsf{a}_+)\partial\partial\mathcal{X}$ (с центральным зарядом $d_0=13-6(k+1)-6/(k+1)$, так что считаем $k\neq-1$):

$$\begin{aligned}
T_{\rm m} &= T_0-\tfrac12\partial\mathcal{F}\partial\mathcal{F}+\mathsf{a}_+\partial\partial\mathcal{F}-\tfrac32\omega\partial\overline{\omega}-\tfrac12\partial\omega\overline{\omega}, \qquad H_{\rm m}=\mathsf{a}_-\partial\mathcal{F}+\omega\overline{\omega}, \qquad (18)\\
\overline{G}_{\rm m} &= \overline{\omega}T_0-\tfrac12\overline{\omega}\partial\mathcal{F}\partial\mathcal{F}+(\mathsf{a}_++\tfrac12\mathsf{a}_-)\overline{\omega}\partial\partial\mathcal{F}+\tfrac12(1-\mathsf{a}_-^2)\partial^2\overline{\omega}-\partial\overline{\omega}\overline{\omega}\omega+\mathsf{a}_-\partial\overline{\omega}\partial\mathcal{F},\\
G_{\rm m} &= \omega, \qquad \mathsf{a}_+=\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}, \qquad \mathsf{a}_-=-\frac{1}{\mathsf{a}_+}.
\end{aligned}$$

Теперь Вакимотовские поля строятся как

$$\begin{aligned}
\beta_{\rm w} &= \exp\{\tfrac2k(U-F)\},\\
\gamma_{\rm w} &= \left(\partial F-\sqrt{\tfrac{k+1}{2}}\partial\mathcal{X}+\sqrt{\tfrac{k+1}{2}}\overline{\psi}(\partial\mathcal{F}-\partial\mathcal{X})\overline{\omega}+(k+1)\overline{\psi}\partial\overline{\omega}+\tfrac12(\omega\overline{\omega}+\psi\overline{\psi})\right)e^{-\frac2k(U-F)}\\
\partial\varphi_{\rm w} &= \tfrac1k\partial F-\tfrac1k\partial U+\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}\partial\mathcal{F}-\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}\partial\mathcal{X}, \qquad (19)\\
\partial\overline{\varphi}_{\rm w} &= -\tfrac{k+1}{k}\partial U+\tfrac{k+1}{k}\partial F-\sqrt{\tfrac{k+1}{2}}\partial\mathcal{F}-\sqrt{\tfrac{k+1}{2}}\partial\mathcal{X}+(k+1)\overline{\psi}\partial\overline{\omega}+(k+1)\partial\overline{\psi}\overline{\omega},\\
\overline{\Psi}^{(1)}_{\rm w} &= \left(\omega+\sqrt{\tfrac{k+1}{2}}\overline{\psi}(\partial\mathcal{F}-\partial\mathcal{X})-(k+1)\partial\overline{\psi}\right)e^{-\frac1k(U-F)}, \qquad \Psi^{(1)}_{\rm w}=-\overline{\omega}e^{\frac1k(U-F)},\\
\overline{\Psi}^{(2)}_{\rm w} &= \overline{\psi}e^{\frac1k(U-F)}, \qquad \Psi^{(2)}_{\rm w} = \left(\psi-\sqrt{\tfrac{k+1}{2}}\partial\mathcal{F}\overline{\omega}+\sqrt{\tfrac{k+1}{2}}\partial\mathcal{X}\overline{\omega}-(k+1)\partial\overline{\omega}\right)e^{-\frac1k(U-F)}
\end{aligned}$$

и они снова реализуют мост между нашей реализацией (со специальной материей (18)) и представлением Вакимото, однако в качестве последнего следует выбрать "*второй*" вариант из [13]:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \Psi^{(2)}_{\mathrm{w}}\beta_{\mathrm{w}} - (k+1)\partial\varphi_{\mathrm{w}}\Psi^{(1)}_{\mathrm{w}} - (k+1)\partial\Psi^{(1)}_{\mathrm{w}}, \qquad E_2 = \overline{\Psi}^{(2)}_{\mathrm{w}}, \qquad E_{12} = \beta_{\mathrm{w}},\\
H^- &= -\tfrac{1}{2}\partial\overline{\varphi}_{\mathrm{w}} - \tfrac{1}{2}(k+1)\partial\varphi_{\mathrm{w}} - \tfrac{1}{2}\Psi^{(1)}_{\mathrm{w}}\overline{\Psi}^{(1)}_{\mathrm{w}} - \tfrac{1}{2}\Psi^{(2)}_{\mathrm{w}}\overline{\Psi}^{(2)}_{\mathrm{w}} + \gamma_{\mathrm{w}}\beta_{\mathrm{w}}, \qquad (20)\\
H^+ &= -\tfrac{1}{2}\partial\overline{\varphi}_{\mathrm{w}} + \tfrac{1}{2}(k+1)\partial\varphi_{\mathrm{w}} - \tfrac{1}{2}\Psi^{(1)}_{\mathrm{w}}\overline{\Psi}^{(1)}_{\mathrm{w}} + \tfrac{1}{2}\Psi^{(2)}_{\mathrm{w}}\overline{\Psi}^{(2)}_{\mathrm{w}}, \quad F_1 = -\overline{\Psi}^{(2)}_{\mathrm{w}}\gamma_{\mathrm{w}} + \overline{\Psi}^{(1)}_{\mathrm{w}},\\
F_2 &= \Psi^{(2)}_{\mathrm{w}}\gamma_{\mathrm{w}}\beta_{\mathrm{w}} - \partial\overline{\varphi}_{\mathrm{w}}\Psi^{(2)}_{\mathrm{w}} - (k+1)\big(\partial\varphi_{\mathrm{w}}\Psi^{(1)}_{\mathrm{w}} + \partial\Psi^{(1)}_{\mathrm{w}}\big)\gamma_{\mathrm{w}} - \Psi^{(2)}_{\mathrm{w}}\Psi^{(1)}_{\mathrm{w}}\overline{\Psi}^{(1)}_{\mathrm{w}} + k\partial\Psi^{(2)}_{\mathrm{w}}.
\end{aligned}
$$

Различные части генераторов (18) собираются в целое при подстановке (19) в представление (20), и последнее принимает вид (3)–(5).

7. Мы показали, что непосредственно в пространстве полей некритической $N=2$ струны в конформной калибровке реализуется аффинная алгебра $s\ell(2|1)$, распространили этот результат на топологические струны и установили несколько основных свойств и следствий найденного представления. Заметим, что всякие, в том числе и существенно более опосредованные, проявления аффинных алгебр и моделей ВЗНВ в теориях струн интересны ввиду открывающихся возможностей классификации и, вообще, "алгебраизации" струнных теорий. Нетривиальная особенность $N=2$ струн состоит в наличии представления аффинной алгебры прямо на мировом листе; теперь предстоит исследовать соответствие *физических состояний* (БРСТ-когомологий) $N=2$ струн и построенного "струнного" представления аффинной супералгебры $s\ell(2|1)$.

Я благодарен И.Типунину за обсуждения. Работа поддержана частично грантом Российского фонда фундаментальных исследований 96-02-16117.

---

1. M.Ademollo *et al*, Phys. Lett. **B62**, 105 (1976); M.Ademollo *et al*, Nucl. Phys. **B111**, 77 (1976); N.Marcus, *A tour through* $N=2$ *strings*, talk at the Rome String Theory Workshop, 1992, hep-th/9211059; E.S.Fradkin and A.A.Tseytlin, Phys. Lett. **B106**, 63 (1981); A.D'Adda and F.Lizzi, Phys. Lett. **B191**, 85 (1987); S.Mathur and S.Mukhi, Phys. Rev. **D36**, 465 (1987); Nucl. Phys. **B302**, 130 (1988); H.Ooguri and C.Vafa, Nucl. Phys. **B361**, 469 (1991); Nucl. Phys. **B367**, 83 (1991);
2. D.Kutasov and E.Martinec, hep-th/9602049.
3. B.Gato-Rivera and A.M.Semikhatov, Phys. Lett. **B293**, 72 (1992), Nucl. Phys. **B408**, 133 (1993).
4. M.Bershadsky, W.Lerche, D.Nemeschansky, and N.P.Warner, Nucl. Phys. **B401**, 304 (1993).
5. A.Boresch, K.Landsteiner, W.Lerche, and A.Sevrin, Nucl. Phys. **B436**, 609 (1995).
6. K.Ito and H.Kanno, Mod. Phys. Lett. **A9**, 1377 (1994).
7. E.Ragoucy, A.Sevrin, and P.Sorba, hep-th/9511049.
8. M.Bershadsky and H.Ooguri, Phys. Lett. **B229**, 374 (1989).
9. K.Landsteiner, W.Lerche, and A.Sevrin, Phys. Lett. **B352**, 286 (1995).
10. E.Verlinde and H.Verlinde, Nucl. Phys. **B352**, 1234 (1991); R.Dijkgraaf, E.Verlinde, and H.Verlinde, Nucl. Phys. **B352**, 59 (1991).
11. A.M.Semikhatov and I.Yu.Tipunin, hep-th/9604176.
12. A.M.Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A2**, 893 (1987); V.G.Knizhnik, A.M.Polyakov, and A.B.Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. **A3**, 819 (1988).
13. P.Bowcock, R.L.Koktava, and A.Taormina, hep-th/9606015.
14. G.Mussardo, G.Sotkov, and M.Stanishkov, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 1135 (1989); N.Ohta and H.Suzuki, Nucl. Phys. **B332**, 146 (1990); K.Ito, Nucl. Phys. **B370**, 123 (1992).