

КВАНТОВЫЙ ВЕНТИЛЬ УПРАВЛЯЕМОЕ-НЕ (CONTROLLED-NOT) НА ОДИНОЧНОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ

С.Н.Молотков

*Институт физики твердого тела РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 9 июля 1996 г.

Предлагается реализация квантового управляемого-НЕ (controlled-NOT) вентиля на одиночной квантовой точке.

PACS: 73.20.Dx

Отличительной особенностью квантового компьютера является его способность обрабатывать суперпозицию квантовых битов (qubits) [1,2]. Универсальный квантовый вычислитель может быть разложен на отдельные блоки – квантовые вентили, каждый из которых представляет собой унитарный преобразователь, преобразующий входные qubits в выходные. Квантовый логический вентиль может преобразовывать любые линейные комбинации входных qubits [1–4]. Благодаря суперпозиции различных путей вычислений в квантовом компьютере возможно существенное ускорение вычислений для ряда важных задач. Одной из таких проблем является задача факторизации (разложение большого числа на простые множители), которая возникает при решении криптографических задач [5]. Подобные задачи факторизации могут быть решены за время, которое степенным образом зависит от длины числа, в отличие от экспоненциально большого времени, если бы задача решалась на классическом компьютере [6].

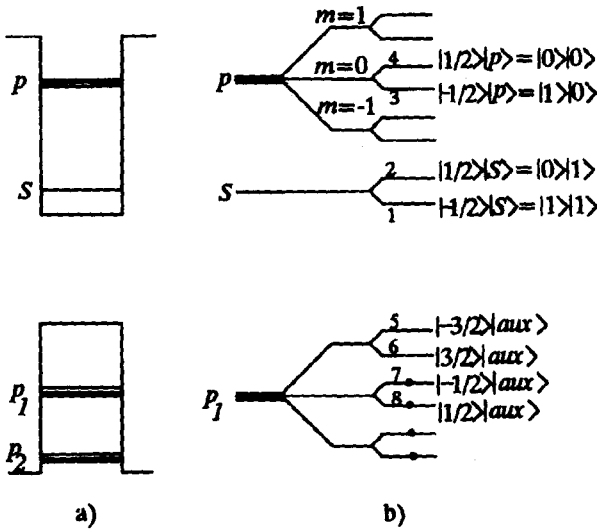
Доказано, что любой квантовый компьютер может быть разложен на элементарные квантовые вентили [1–4], более того показано, что практически любой квантовый вентиль является универсальным [7], то есть квантовый компьютер может быть разложен на блоки с использованием лишь одного вентиля как базового. В работе [8] была предложена схема, где роль элементарных вентилях представляют собой ионы в ловушках. Значения qubits в каждом вентилю ассоциируются с атомными состояниями иона. Экспериментально реализован квантовый вентиль на ионе Be^+ в ловушке, состояния qubits связываются с двумя внутренними атомными уровнями сверхтонкой структуры и двумя состояниями иона как целого в гармоническом потенциале ловушки (основным уровнем осциллятора и первым возбужденным) [9]. Состояние qubits в одном вентилю к другому предполагается передавать посредством коллективной колебательной моды для регистра из ионов в ловушках [8] (пока эта наиболее трудная часть экспериментальной схемы не реализована).

Обсуждаются также схемы, где для передачи состояния одного вентиля к соседнему используются отдельные фотоны (переход атома через так называемое темное состояние – dark state) [10].

Упомянутые схемы с ионами в ловушках концептуально привлекательны и хороши для демонстрации принципа работы, но для реализации вычислителя потребуется огромное число подобных вентилях, что, по-видимому, вряд ли возможно сделать экспериментально.

В данной работе мы хотим предложить твердотельную реализацию управляемого-НЕ (controlled-NOT) вентиля на квантовой точке. Подобная схема, на наш взгляд, может иметь ряд преимуществ. Основным преимуществом является то, что могут быть созданы с относительно небольшими экспериментальными затратами массива из большого числа таких точек. Хотя данная схема имеет и свои недостатки, основным является малое время декогерентности по сравнению с атомными системами.

Квантовый вентиль представляет собой квантовую точку на основе GaAsAl такую, что в зоне проводимости имеется два размерно-квантованных уровня (рис.1a), симметрии *s*-типа и *p*-типа. Разумеется, такая классификация имеет место только для сферически симметричной квантовой точки, что трудно выполнить экспериментально. Для нашей схемы не требуется идеальная сферическая симметрия, наоборот тот факт, что реальная квантовая точка не является идеально сферически симметричной будет нами использован. Состояния каждого уровня в зоне проводимости двукратно вырождены по спину, магнитное поле снимает вырождение по проекциям спина, и спектр в зоне проводимости принимает вид, показанный на рис.1b.



Энергетические уровни в квантовой точке, используемые в вентиле управляемое-НЕ

Если квантовая точка сферически симметрична, то в отсутствие магнитного поля каждый из двух размерно-квантованных уровней в валентной зоне четырехкратно вырожден. Магнитное поле снимает вырождение по проекциям полного момента (рис.1b). Экспериментально никогда не удастся сделать квантовую точку сферически симметричной. В этом случае из-за более низкой симметрии четырехкратно вырожденный уровень (без магнитного поля) расщепляется на две пары уровней, генетически происходящих из уровней проекцией полного момента $\pm 3/2$ и $\pm 1/2$. Пара состояний с проекцией $\pm 1/2$ как правило выталкивается вниз (вентиль также может быть реализован, когда вниз выталкиваются состояния $\pm 3/2$).

Квантовый controlled-NOT вентиль представляет собой унитарный преобразователь, который переключает управляемый target qubit $|\epsilon_2\rangle$ в зависимости

состояния управляющего qubit $|\varepsilon_1\rangle$. Преобразование имеет вид

$$|\varepsilon_1\rangle|\varepsilon_1\rangle \Rightarrow |\varepsilon_1\rangle|\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2\rangle, \quad (1)$$

где \oplus – сложение по модулю 2.

Полный базис из четырех состояний в зоне проводимости отвечает состояниям двух qubits по следующему правилу соответствия

$$\begin{aligned} \{|\sigma\rangle|l\rangle\} \equiv \{|\frac{1}{2}\rangle|p\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle|p\rangle, |\frac{1}{2}\rangle|s\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle|s\rangle\} \equiv \\ \{|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\} \end{aligned} \quad (2)$$

Тип уровня (l) s или p отвечает target qubit, а спиновое состояние (σ) – управляющему qubits.

Функция управляемого-НЕ реализуется посредством последовательного воздействия трех импульсов, частоты которых подобраны в резонанс с переходами в зоне проводимости и между уровнем $|-\frac{1}{2}\rangle|s\rangle$ в зоне проводимости и уровнем $|-\frac{3}{2}\rangle|aux\rangle$ в валентной зоне, причем эта последовательность всегда одинакова и не зависит от исходного состояния вентиля.

При резонансной подсветке достаточно рассмотреть поведение волновой функции, отвечающей данной паре уровней, которые находятся в резонансе с частотой внешнего поля. Если на двухуровневую систему действует поле с частотой ω , которая близка к расстоянию между уровнями и амплитуда поля медленно меняется на временах $1/\omega$, то уравнения для амплитуд волновой функции, отвечающих первому и второму уровню, могут быть записаны в виде [11,12]

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}a_1(t) &= \delta a_1(t) + \lambda a_2(t), \\ i\frac{\partial}{\partial t}a_2(t) &= -\delta a_2(t) + \lambda^* a_1(t), \\ \delta &= \omega - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/\hbar, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_{1,2}$ – расстояние между парой уровней, λ – константа, описывающая взаимодействие с полем ($\lambda = dE_0$, d – дипольный матричный элемент, E_0 – амплитуда поля, $E(t) = \text{Re}\{E_0 \exp(-i\omega t)\}$). Удобно перейти к новым амплитудам, квадрат модуля которых не зависит от времени [12]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= \hat{V} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ \hat{V} &= \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\delta}{\varepsilon} \right\}, \quad \omega_R = \sqrt{\delta^2 + \lambda^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ω_R – частота Раби. В случае точного резонанса $\delta = 0$. Если переменное поле включается на некоторое время t , а затем выключается (считаем для простоты, что оно внезапно включается и выключается, и его амплитуда постоянна в течение времени t), то система переходит в новое состояние с амплитудами $a_1(t)$ и $a_2(t)$, которые имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \exp(i\omega_R t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\omega_R t) \end{pmatrix} \hat{V} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $a_{1,2}(0)$ – амплитуды до включения поля.

В случае точного резонанса имеем

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -i \sin(\lambda t) \\ -i \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix} = \hat{U}(\theta) \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\theta = 2\omega_R t$.

Амплитуды a_1 и a_2 соответствуют значениям qubits. В зависимости от длительности импульса поля система будет переходить в определенные линейные комбинации qubits. Действие импульсов $\pi/2$, $-\pi/2$ и 2π эквивалентно линейному преобразованию исходных состояний qubits в выходные в соответствии с матрицами:

$$\hat{U}_{\omega_c}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\hat{U}_{\omega_c}(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{U}_{\omega_{aux}}(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Аналогично работе [9], функция управляемого-НЕ (CN) реализуется последовательным приложением трех импульсов. Разрешены дипольные переходы в линейной поляризации между уровнями $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ в зоне проводимости на частоте ω_c , а также между уровнями $1 \leftrightarrow 5$ в зоне проводимости и валентной зоне на частоте ω_{aux} при циркулярной поляризации (в случае идеальной сферической формы квантовой точки). Будем также считать, что легирование системы дырочного типа, уровни 5,6 пустые в валентной зоне, а уровни 7,8 заполнены электронами. Учет экситонных эффектов между электроном и дыркой при исследовании квантовой динамики двухуровневой системы сводится к добавлению в гамильтониан члена кулоновского взаимодействия. Такое взаимодействие не меняет качественно динамику системы. Формально учет кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой сводится к перенормировке резонансной частоты. Чтобы продемонстрировать это достаточно рассмотреть следующий гамильтониан: $\hat{H} = \epsilon_e c_e^\dagger c_e + \epsilon_h c_h^\dagger c_h + [\lambda \exp(-i\omega t) c_h^\dagger c_e^\dagger + \text{з.с.}] + U_c n_e n_h$, где $U_c < 0$ – константа кулоновского взаимодействия между электроном (индекс e) и дыркой (индекс h), $\omega = \epsilon_e - \epsilon_h$ – частота внешнего поля. Зависимость от времени убирается унитарным преобразованием $\hat{U}(t) = \exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}(c_e^\dagger c_e + c_h^\dagger c_h)\right\}$ [см.12]. Такое преобразование приводит к гамильтониану двухуровневой системы, не зависящему от времени, который в базисе многочастичных состояний $|n_e, n_h\rangle$ ($n_e = 1, n_h = 1$ – числа заполнения электронов и дырок) имеет вид $\begin{pmatrix} \epsilon_1 - \omega/2 + U_c/2 & \lambda \\ \lambda^* & \epsilon_2 + \omega/2 + U_c/2 \end{pmatrix}$, что сводится к гамильтониану двухуровневой системы (уравнение (3) в тексте) без взаимодействия, но с перенормированной резонансной частотой (что является следствием коммутативности оператора $\hat{U}(t)$ с членом взаимодействия $U_c n_e n_h$ в гамильтониане). Динамика системы при воздействии π импульсов не меняется.

Нижний размерно-квантованный уровень в зоне проводимости имеет симметрию s -типа (представление Γ_1 с базисными функциями $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$; $s \uparrow, \downarrow$). Первый возбужденный уровень в идеально сферически-симметричной яме имеет симметрию p -типа и должен формально классифицироваться по представлениям Γ_8 и Γ_7 , по тем же представлениям, что и первый уровень в валентной зоне (последний происходит из p атомных орбиталей, уровень же в зоне проводимости происходит из атомных s -орбиталей, а симметрию p -типа приобретает из-за размерного квантования). Базисные функции в сферически-симметричной

квантовой точке для представления Γ_8 имеют вид [13]

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}} z \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} (x \pm iy) \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{pmatrix} \\ \left| \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2} \right\rangle &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (x \pm iy) \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

и для представления Γ_7 , которое отщеплено вниз спин-орбитальным взаимодействием (на рисунке эти уровни не показаны)

$$\left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (x \pm iy) \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} z \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

Базисные функции имеют такой вид только при идеальной сферической форме; поскольку мы используем только переходы между некоторыми уровнями, которые разрешены правилами отбора при идеальной форме, то эти же переходы будут разрешены и при отклонении формы от идеальной (что всегда имеет место в реальных экспериментах). Понижение симметрии может лишь привести к разрешению новых переходов, но не запрету уже имеющихся.

Для нас будет существенна “развязка” орбитальных и спиновых степеней свободы уровней в зоне проводимости уровня p -типа. Поскольку уровень p -типа в зоне проводимости возникает из-за размерного квантования атомных функций s -типа, в этом случае можно заведомо пренебречь спин-орбитальным расщеплением размерно-квантованного уровня p -типа. Поэтому в качестве базисных функций будут выступать функции

$$x \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}, \quad y \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}, \quad z \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

Если магнитное поле направлено по оси z , то происходит расщепление вырожденных уровней по следующим парам: с орбитальным моментом $m=0$: $z \uparrow$ и $z \downarrow$; с моментом $m=+1$: $(x+iy) \uparrow$ и $(x+iy) \downarrow$; с моментом $m=-1$: $(x-iy) \uparrow$ и $(x-iy) \downarrow$ (рисунок), причем расстояние между уровнями $m=0$ ($z \uparrow$ и $z \downarrow$) такое же, как между $s \uparrow$ и $s \downarrow$, поскольку оно определяется только спином. Это обстоятельство для нас является существенным; при этом частоты переходов $s \uparrow \leftrightarrow p_{m=0} \uparrow$ и $s \downarrow \leftrightarrow p_{m=0} \downarrow$ одинаковы, и равны ω_c .

Функция CN реализуется последовательным воздействием импульсов: $\pi/2$ импульс на частоте ω_c (соответствующая матрица преобразования $\hat{U}_{\omega_c}(\pi/2)$, далее 2π (матрица $\hat{U}_{\omega_{aux}}(2\pi)$ на частоте ω_{aux} , затем $-\pi/2$ импульс на частоте ω_c (матрица $\hat{U}_{\omega_c}(-\pi/2)$).

Если в начальный момент система приготовлена, например, в состоянии $|\frac{1}{2}\rangle|0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle$, то первый $\pi/2$ импульс на частоте ω_c переводит ее в состояние

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle(|0\rangle - i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{2}\rangle(|p\rangle - i|s\rangle) \quad (11)$$

Второй 2π импульс на частоте ω_{aux} (импульс “прокрутки” через вспомогательное состояние $|aux\rangle$) не воздействует на новое состояние, так как оно не содержит компоненты $|1\rangle|1\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle|s\rangle$ (только эта компонента подвергается воздействию при прокрутке на частоте ω_{aux}). Третий $-\pi/2$ импульс возвращает состояние (11) в исходное в соответствии с логикой работы CN -вентиля (исходное состояние не меняется, поскольку управляющий бит равен нулю).

Если же исходное состояние приготовлено с отличной от нуля компонентой управляющего qubit $|1\rangle|1\rangle$, то второй 2π импульс на частоте ω_{aux} изменяет

знак у компоненты $|1\rangle|1\rangle$, оставляя другие неизменными. Следующий $-\pi/2$ импульс приводит к инверсии управляемого qubit на противоположный, в результате имеем

$$\hat{U}_{\omega_c}(-\frac{\pi}{2})\hat{U}_{\omega_{1,3}}(2\pi)\hat{U}_{\omega_c}(\frac{\pi}{2})\{|1\rangle|0\rangle\} = i\{|1\rangle|1\rangle\}, \quad (12)$$

$$\hat{U}_{\omega_c}(-\frac{\pi}{2})\hat{U}_{\omega_{1,3}}(2\pi)\hat{U}_{\omega_c}(\frac{\pi}{2})\{|1\rangle|1\rangle\} = -i\{|1\rangle|0\rangle\} \quad (13)$$

Символическая запись матричного умножения в (12,13) означает, что импульсы на разных частотах воздействуют только на компоненты волновой функции, отвечающие уровням в резонансе с импульсами.

Остановимся теперь на вопросе, каким образом можно приготовить произвольное исходное состояние вентиля. Состояние $|1\rangle|1\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle|s\rangle$ может быть получено приложением π импульса на частоте $\omega_{7,1}$, состояние $|1\rangle|0\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle|p\rangle$ может быть получено из предыдущего воздействием π импульса на частоте $\omega_{1,3}$. Состояние $|0\rangle|1\rangle = |\frac{1}{2}\rangle|s\rangle$ получается подсветкой π импульсом на частоте $\omega_{7,2}$ в циркулярной поляризации. Из данного состояния получается состояние $|0\rangle|0\rangle = |\frac{1}{2}\rangle|p\rangle$ подсветкой π импульсом на частоте $\omega_{2,4}$.

Для квантовой системы, состояния которой используются как qubits, существенными являются два характерных времени. Первое – время переключения вентиля, которое оценивается как $\hbar/\Delta E \approx 10^{-13}$ с (ΔE – типичное расстояние между уровнями; в нашем случае оно составляет несколько мэВ – расстояние между уровнями в зоне проводимости). Второе – время декогерентности, которое лимитируется временем рекомбинации, которое не превышает 10 нс. Параметром “добротности” квантового вентиля является отношение этих времен $\sim 10^3$ (для сравнения подобное отношение для ядерных спинов составляет 10^7 [14], а для ионов в ловушках может достигать 10^{13} [14]).

В заключение выражаю благодарность С.В.Иорданскому, В.Д.Кулаковскому, С.С.Назину и В.Б.Тимофееву за плодотворные обсуждения в процессе выполнения работы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-02-18918), а также программой “Поверхностные атомные структуры” (проект 95-1.1).

-
1. R.Feynman, Int. J. Theor. Phys. **21**, 467 (1982); Uspekhi Fiz. Nauk **149**, 671 (1986).
 2. D.Deutsch, Proc. Roy. Soc. A **400**, 97 (1985); D.Deutsch, Proc. Roy. Soc. A **425**, 73 (1989); D.Deutsch and R.Jossa, Proc. Roy. Soc. A **439**, 553 (1992).
 3. C.H.Bennett, Phys. Today **48**, 24 (1995).
 4. D.P.DiVincenzo, Science **270**, 255 (1995).
 5. P.W.Shor, Report No. quant-ph/9508027.
 6. M.E.Hellman, Sci. Amer. **241**, 130 (1979); G.J.Simmons, The Math. Intelligence **1**, 233 (1979).
 7. S.Lloyd, Phys. Rev. Lett. **75**, 346 (1995).
 8. J.I.Cirac and P.Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
 9. C.Monroe, D.M.Meekhof, B.E.King et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 4714 (1995).
 10. T.Pellisari, S.A.Gardiner, J.I.Cirac, and P.Zoller, Phys. Rev. Lett. **75**, 3788 (1995).
 11. S.Flügge, *Practical Quantum Mechanics II*, ch.V, 180, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
 12. В.М.Галицкий, В.Ф.Елесиян, *Резонансное взаимодействие электромагнитных полей с полупроводниками*. М.: Энергоатомиздат, 1986.
 13. G.L.Bir, G.E.Picus, *Symmetry and Strain-Induced Effects in Semiconductors*, Willey, New York, 1974.
 14. D.P.DiVincenzo, Phys. Rev. A **51**, 1015 (1995).